(Начало см. на с. 31)

Пары, тройки, четверки...

2. *Федя знает ответы на 10 вопросов из 30 возможных. В билет включаются два случайно выбранных вопроса из этих 30. Каковы шансы Феди благополучно ответить на оба вопроса?*

Решение. Выясним, сколько всего разных билетов может составить экзаменатор. Их столько, сколько пар можно составить из 30 элементов, т.е. $30 \cdot 29 = 870$.

Как мы нашли это число? Первый вопрос — это любой из 30 возможных. Если он уже выбран, то вторым вопросом может быть любой из 29 оставшихся.

Точно так же посчитаем количество билетов, «благоприятных» для Феди: $10 \cdot 9 = 90$.

Значит, вероятность сдать экзамен равна $90/870 = 3/29 \approx 0{,}103$.

Мы могли рассуждать и чуть иначе: не различать билеты, отличающиеся только порядком вопросов. Тогда разных билетов будет вдвое меньше, т.е. $30 \cdot 29/2 = 435$. Благоприятных для Феди станет тоже в два раза меньше: $10 \cdot 9/2 = 45$. Ответ, конечно, получится тот же самый.

Число неупорядоченных пар из n элементов обозначается C_n^2. Это число встречается во многих ситуациях и вычисляется, как мы уже поняли, по формуле

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

3. *Придя на экзамен, Федя узнал, что в билете не 2 вопроса, а 3. Каковы шансы Феди благополучно ответить на все вопросы?*

Решение. На этот раз можно составить $30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$ разных билетов. В самом деле, первый вопрос можно выбрать 30 способами. Как бы он ни был выбран, вторым может оказаться любой из 29 остальных, а после выбора первых двух вопросов третьим может оказаться любой из 28 остальных.

Точно так же, благоприятных для Феди билетов $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$, так что вероятность сдать экзамен равна теперь лишь $720/24360 = 6/203 < 0{,}03$.

Конечно, и в этой задаче можно было не обращать внимания на порядок вопросов в билете, т.е. считать количество трехэлементных подмножеств $\{P, Q, R\}$ множества всех вопросов. Это число в 6 раз меньше, чем $30 \cdot 29 \cdot 28$, поскольку три элемента P, Q и R можно переставить 6 способами: PQR, PRQ, QPR, QRP, RPQ и RQP.

Итак, Федя мог получить любой из $\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6} = 4060$ разных по содержанию билетов. Благоприятных из них только $10 \cdot 9 \cdot 8/6 = 120$. Разделив 120 на 4060, мы получим ту же вероятность.

Число неупорядоченных троек из n элементов обозначается C_n^3. Оно равно

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

4. *Конечно, Феде не повезло, и экзамен он не сдал. А когда Федя пришел в следующий раз, экзаменатор изменил правила: он задает четыре вопроса (случайно выбирая их из 30 возможных). Если Федя ответит на все 4 вопроса, то получит пятерку, если на 3 вопроса — то четверку, если на 2 — тройку, а в противном случае — двойку.*

С какой вероятностью Федя получит оценку а) 5; б) 4; в) 3; г) 2?

Решение. а) Как мы уже видели, всего можно составить $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$ разных билетов. Из них $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ билетов состоят только из известных Феде вопросов, так что вероятность сдать экзамен на «5» равна

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27} = \frac{2}{261} \approx 0{,}0076.$$

В решении пункта а) мы считали разными билеты, отличающиеся лишь порядком вопросов. В следующих пунктах мы не будем их различать, т.е. будем рассматривать не упорядоченные наборы, а подмножества, состоящие из 4 вопросов. Их количество в 24 раза меньше, чем $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$, поскольку 4 элемента можно переставить 24 способами:

PQRS, PQSR, PRQS, PRSQ, PSQR, PSRQ,
QPRS, QPSR, QRPS, QRSP, QSPR, QSRP,
RPQS, RPSQ, RQPS, RQSP, RSPQ, RSQP,
SPQR, SPRQ, SQPR, SQRP, SRPQ, SRQP.

Итак, количество 4-элементных подмножеств 30-элементного множества равно

$$C_{30}^4 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{24} = 27405.$$

б) Федя получит «4», если ему достанется билет, в котором 1 незнакомый вопрос (любой из 20) и 3 знакомых вопроса. Эти 3 вопроса из 10 можно выбрать $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$ способами. Поэтому вероятность получить «4» равна

$$\frac{20 \cdot 120}{27405} \approx 0{,}0876.$$

в) Для получения тройки нужен билет, в котором 2 знакомых и 2 незнакомых вопроса. Эта вероятность равна

$$\frac{C_{10}^2 C_{20}^2}{C_{30}^4} = \frac{(10 \cdot 9/2) \cdot (20 \cdot 19/2)}{27405} \approx 0{,}312.$$

г) Двойку можно получить двояко: ответив на один вопрос билета или не ответив ни на один. Соответствующие вероятности равны

$$\frac{10 \cdot C_{20}^3}{27405} = \frac{10 \cdot (20 \cdot 19 \cdot 18/6)}{27405} \approx 0{,}416$$

и

$$\frac{C_{20}^4}{27405} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17/24}{27405} \approx 0{,}177.$$

Значит, вероятность получить двойку примерно равна

$$0{,}416 + 0{,}177 = 0{,}593.$$

Ответ можно записать в виде таблички:

Отметка	2	3	4	5
Вероятность	0,593	0,312	0,0876	0,0076

Наглядно это распределение можно изобразить гистограммой (рис. 4).

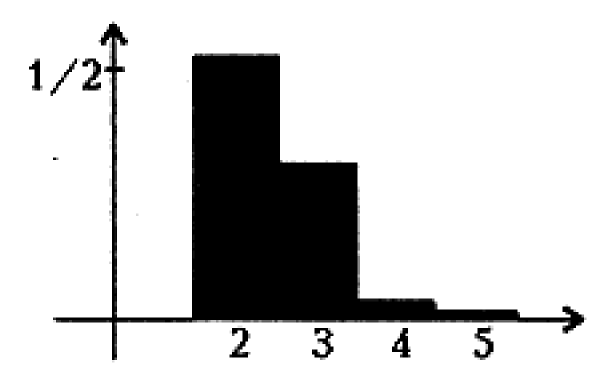

Рис. 4

Заметим, что сумма

$$0{,}0076 + 0{,}0876 + 0{,}312 + 0{,}593 = 1{,}002 \approx 1.$$

На самом деле, конечно, сумма этих вероятностей в точности равна 1, ибо какую-то одну из оценок 2, 3, 4 или 5 Федя получит.

Вообще, если все пространство E элементарных событий разбито на несколько (непересекающихся) множеств $A_1, A_2, \ldots, A_r$, то общее число их элементов равно $N = |E|$:

$$|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_r| = |E|$$

и, следовательно, сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_r$ равна 1:

$$\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots + \mathbf{P}(A_r) = \frac{|A_1|}{N} + \frac{|A_2|}{N} + \ldots + \frac{|A_r|}{N} = \frac{N}{N} = 1. \quad (1)$$

Про такие события $A_1, A_2, \ldots, A_r$ говорят, что они образуют *полную систему событий*.

Здесь очень важно, что никакие два из этих событий не пересекаются. Вообще, если два множества A и B (содер-