В большинстве стран мира элементы теории вероятностей и статистики изучаются в средней школе и считаются даже более важным математическим предметом (из-за многочисленных применений в физике, биологии, экономике,...), чем многие привычные российским школьникам разделы. В нашей стране, к сожалению, вероятность пока изучают только в очень немногих школах. Цель этой статьи – дать первое представление о понятиях, задачах и результатах теории вероятностей, с надеждой, что отдельные фрагменты этой теории будут все чаще появляться на страницах «Кванта».

Посчитаем вероятности

Н.ВАСИЛЬЕВ, А.СПИВАК

ЧТО такое вероятность? Дать точное определение, которое годилось бы во всех многочисленных применениях, непросто.

Спросите студента-математика, и он отчеканит:

– Вероятностным пространством называется σ-алгебра множеств, на которой задана σ-аддитивная неотрицательная функция (мера), значение которой на всем пространстве равно 1. Вероятность события (множества) – его мера.

– А что такое случайная величина?

– Это измеримая функция.

– А что такое среднее значение случайной величины?

– Это ее интеграл Лебега.

И студент прав. Именно такие определения даны в книге А.Н.Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей», вышедшей в свет в 1933 году. Но для первого знакомства этот подход явно не годится: не знает большинство наших читателей, что такое интеграл Лебега!

А как ответит на этот вопрос нематематик? Скорее всего, он скажет, что вероятность события – это его частота. Точнее, если вообразить, что в похожих, многократно воспроизводимых условиях событие иногда происходит, а иногда нет, то вероятность – это доля случаев, в которых оно происходит.

Это объяснение понятнее, но его трудно превратить в точное математическое определение. (Например, если мы 100 раз подбрасываем монету, то естественно ожидать, что примерно в 50 случаях выпадет герб. Но герб не обязательно выпадет именно в 50 случаях. Может быть и 51, и 45, и даже 100 гербов. Вот только вероятность последнего чудовищно мала – скоро мы научимся считать такие вероятности и узнаем, что она равна $1/2^{100} < 1/10^{30}$.)

На самом деле, познакомиться с основными приемами подсчета вероятности может даже шестиклассник. Мы начнем с так называемого *классического (комбинаторного)* определения вероятности и лишь в конце статьи придем, через неравенство Чебышёва, к *закону больших чисел*, отчасти объясняющему связь между вероятностью события и частотой его появления.

Большая часть текста статьи – задачи, одни из которых решены в тексте, а другие оставлены в качестве упражнений (все они занумерованы по порядку, к некоторым даны указания).

Комбинаторное определение

Пусть у нас имеется конечное множество E, состоящее из N элементов. Элементы множества E называются *элементарными событиями* (возможными исходами испытаний). *Событием* называется любое подмножество A множества E. *Вероятность* $\mathbf{P}(A)$ события A задается формулой

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{N},$$

где $|A|$ – число элементов множества A.

Это значит, что вероятность каждого элементарного события (отдельного элемента множества E) равна $1/N$, а вероятность любого события A складывается из них как из атомов.

Такое определение вероятности годится, например, для задач о бросаниях монеты или игрального кубика и вообще для любой ситуации, где есть несколько равноправных (обычно – из соображений симметрии) возможных исходов.

1. *Игральный кубик бросают два раза. Какова вероятность, что*

а) в первый раз выпало меньше 4 очков, а во второй – больше 4;

б) в первый раз выпало меньше очков, чем во второй;

в) в сумме за два броска выпало k очков, где $k = 1, 2, \ldots, 12$?

Решение. Бросить кубик два раза – все равно что независимо друг от друга бросить два кубика. Поэтому всего здесь $6 \cdot 6 = 36$ возможных исходов. Это – пары (x, y), где x – число очков, выпавших на первом кубике, а y – на втором ($1 \le x \le 6$ и $1 \le y \le 6$). Их удобно изображать 36 точками, расположенными в виде квадрата 6×6 (рис.1).

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

Рис. 1

Осталось отметить точки (x, y), удовлетворяющие соответствующему условию, посчитать их количество и разделить на 36 (рис. 2).

а
●●●○○○
●●●○○○
○○○○○○
○○○○○○
○○○○○○
○○○○○○
$x < 4,\ y > 4$

б
●●●●●○
●●●●○○
●●●○○○
●●○○○○
●○○○○○
○○○○○○
$x < y$

в
○○○○○○
○○○○○○
●○○○○○
○●○○○○
○○●○○○
○○○●○○
$x + y = 5$

Рис. 2

Получаем ответы: а) $3 \cdot 2/36 = 1/6$; б) $15/36 = 5/12$. А ответ в пункте в) изображен в виде *гистограммы*, где высоты столбиков соответствуют вероятностям отдельных событий (рис. 3).

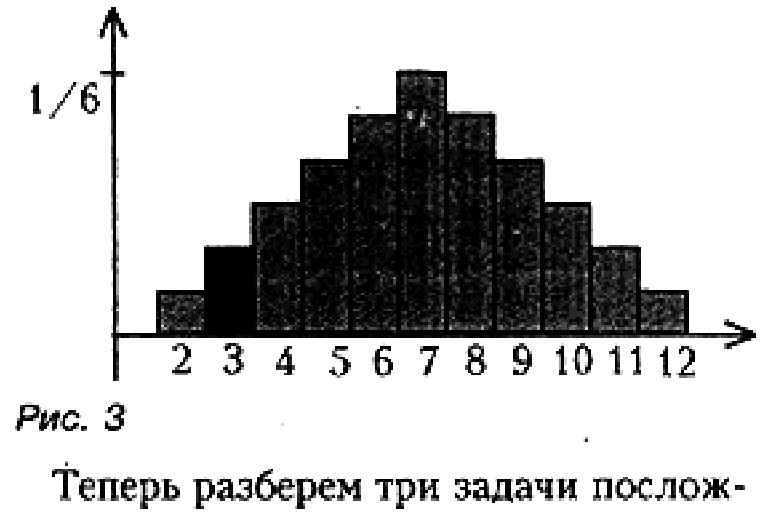

Рис. 3

Теперь разберем три задачи посложнее.

(Продолжение см. на с. 34)