Конкурс «Математика 6—8»

Мы начинаем очередной конкурс «Математика 6—8». Как и в предыдущих конкурсах, будет предложено 20 задач, по 5 задач в номерах 4 — 6 этого года и в №1 за 1998 г. Срок присылки решений задач этого номера — 15 ноября 1997 г. Решения присылайте по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Победители конкурса будут награждены призами журнала, а также приглашены на заключительный тур конкурса в летней математической школе в августе 1998 г.

1. Покажите, что если натуральное число n не делится на 3, то найдутся два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на n.

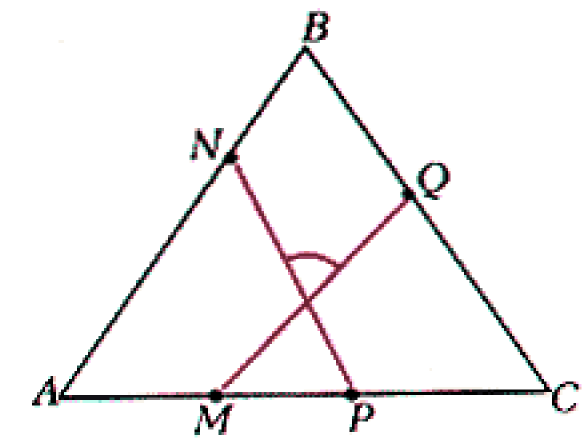
И.Акулич

2. Можно ли разделить числа 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999 на две группы так, чтобы сумма квадратов чисел одной группы равнялась сумме квадратов чисел другой группы?

П.Филевич

3. В равностороннем треугольнике ABC со стороной a точки M, N, P и Q расположены так, как это показано на рисунке. Известно, что $MA + AN = PC + CQ = a$. Докажите, что угол между отрезками MQ и PN равен 60°.

В.Произволов



4. 25 одноклассников ежегодно в день окончания школы звонят друг другу. В очередном году оказалось, что среди любых трех одноклассников хотя бы одна пара не смогла связаться по телефону. Какое наибольшее количество разговоров между одноклассниками могло произойти?

Д.Хмелев, В.Щиголев

5. В одной большой клетке сидели 38 попугаев. Однажды они передрались, в результате каждый из них выдрал у кого-то другого перо из хвоста и у всех попугаев оказались поврежденными хвосты. Хозяин решил пересадить их в три клетки, которые вмещали 16, 16 и 6 попугаев. Докажите, что он может рассадить попугаев так, чтобы ни один попугай не сидел в одной клетке со своим обидчиком.

И.Акулич

Кругами по лесу, или Кардиоида для грибника

С.БОГДАНОВ

Ранним утром в ясный сентябрьский день мы, трое грибников, вышли с востока на знакомую просеку со старой линией электропередач. Тропинка вывела к приметному столбу с изгрызенным лосями основанием; здесь западнее просеки начинались груздевые места. Решили, разделившись, углубиться в лес и встретиться через 4 часа на том же месте. Компасов не было, но ориентиры были надежными: просека тянется строго с севера на юг, солнце — на востоке, на границах массива — большие озера (рис.1).

Чтобы не отвлекаться на ориентировку и вовремя вернуться, я выбрал простейший вариант движения: половину времени идти в направлении «солнце в спину», а возвращаться — в противоположном направлении. Корзину я наполнил, но на обратном пути пришлось немного скорректировать маршрут; в итоге я вышел на просеку примерно в километре южнее условленного места и опоздал на 15 минут.

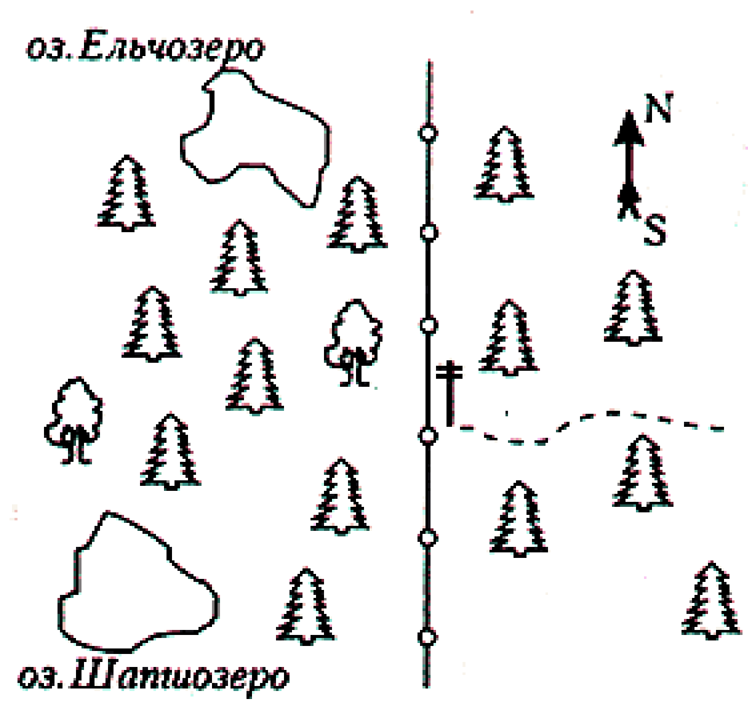


Рис.1

По возвращении я решил разобраться с траекторией своей прогулки и выяснить, где в принципе мог бы оказаться, если бы строго следовал своему плану. После некоторых разумных допущений задача выглядела так:

Точка B — Солнце — движется в плоскости XY с постоянной угловой скоростью ω по окружности большого радиуса, центр которой расположен в начале координат (рис.2). Точка A — грибник — движется из начала координат с постоянной по величине скоростью v в направлении «от B», т.е. скорость в любой момент направлена вдоль линии «Солнце — грибник». В некоторый момент времени t направление скорости меняется на противоположное, и в дальнейшем точка A движется в направлении «на B». Каковы координаты точки A в момент времени $2t$?