$+ vy^3$. Положим $x + y = p$, $xy = q$. Поскольку

$$\left(ux^n + vy^n\right) = (x+y)\left(ux^{n-1} + vy^{n-1}\right) - xy\left(ux^{n-2} - vy^{n-2}\right), \quad (1)$$

для определения p и q получаем систему линейных уравнений

$$bp - aq = c,\ cp - bq = d, \quad (2)$$

а для определения x и y (а затем u, v из линейной системы $u + v = a$, $ux + vy = b$) достаточно решить квадратное уравнение

$$z^2 - pz + q = 0; \quad (3)$$

если оно имеет различные корни z_1 и z_2, можно взять $x = z_1$, $y = z_2$.

Перейдем к конкретным вопросам, заданным в условии. Ответы на первые два вопроса положительны. Прогрессии в примере а) можно подобрать устно (особенно если догадаться умножить все числа на 3): это

$$\frac{2^n}{3} + \frac{(-1)^n}{3} \ (n = 1, 2, 3, 4).$$

В примере б) из системы (2) $2p - q = 3$, $3p - 2q = 5$ находим $p = q = 1$, из уравнения (3) $z_{1,2} = \left(1 \pm \sqrt{5}\right)/2$, так что каждая прогрессия оказывается состоящей из иррациональных чисел: если $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, то общая формула

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}. \quad (4)$$

Ответы на вопросы в), г) отрицательны. В случае в) получается уравнение $z^2 - 2z + 1 = 0$, у которого кратные корни $x = y = 1$ (а наша последовательность не постоянная). В случае г) из системы $2p - q = 3$, $3p - 2q = 2$ найдем $p - q = -1$, $p = 4$, $q = 5$, а уравнение $z^2 - 4z + 5 = 0$ не имеет вещественных решений. (Впрочем, если выйти в область комплексных чисел, нужные прогрессии со знаменателями $2 + i$ и $2 - i$ — корнями уравнения $(z-2)^2 = -1$, разумеется, находятся без труда.)

Наконец, утверждение д) сразу следует из формул (1) и (2) для нашей последовательности $r_n = ux^n + vy^n$. Если $a = r_1$, $b = r_2$, $c = r_3$ и $d = r_4$ рациональные числа, то из (2) ясно, что p и q рациональны, а из (1), записанной в виде $r_n = pr_{n-1} - qr_{n-2}$ ясно, что рациональны и все последующие члены.

Замечание. Из решения ясно, что сумма двух геометрических прогрессий — последовательность a_n ($n = 1, 2, \ldots$), удовлетворяющая *линейному рекуррентному уравнению второго порядка*:

$$a_{n+1} = pa_n - qa_{n-1} \ (\text{при } n \geq 2).$$

Обратно, любая такая последовательность a_n может быть записана в виде суммы двух геометрическмих прогрессий, знаменатели которых — корни *характеристического уравнения* $z^2 - pz + q = 0$ (быть может, комплексные), или если характеристическое уравнение имеет двукратный корень z_0 (т.е. $p^2 - 4q = 0$), — в виде $a_n = (\alpha n + \beta)z_0^n$, где α и β — некоторые константы.

Н.Васильев

М1585. *В новой лотерее на карточке из $36 = 6 \times 6$ клеток надо отметить 6. При розыгрыше лотереи называются некоторые 6 «черных» (проигрышных) клеток. Билет считается выигравшим, если на нем не отмечено ни одной черной клетки. Какое наименьшее число билетов нужно купить, чтобы наверняка среди них был хоть один выигравший? Решите ту же задачу для карточки из $N = k \times k$ клеток, из которых надо отмечать k, при четном k.*

Ответ: 9 карточек; $k + 3$ карточки.

9 карточек K_1, K_2, ..., K_9 можно заполнить так: в K_i при $i = 1, 2, 3, 4, 5$ отметить все клетки i-й строки, в K_6 — левые половины 1-й и 6-й строк, в K_7 — правую половину 1-й и левую 6-й, в K_8 — левую половину 2-й и правую 6-й, в K_9 — правые половины 2-й и 6-й строк.

В самом деле, если 6 клеток, объявленных черными, стоят в разных строках, то в одной из половин — левой или правой — 6-й строки и в одной из половин 1-й или 2-й строки нет черных клеток, так что выиграет один из билетов $K_6 - K_9$. А если в 6-й строке две черных клетки, то выиграет один из билетов $K_1 - K_5$.

Докажем, что 8 карточек заполнить требуемым образом нельзя, т.е. для 8 заполненных карточек всегда можно объявить проигрышными такие 6 клеток, что в каждой карточке хотя бы одна из отмеченных клеток окажется проигрышной.

В самом деле, если есть клетка, отмеченная не менее чем в трех карточках, то объявим ее проигрышной. Поскольку карточек, где она не отмечена, будет не более 5, то справедливость доказываемого утверждения в этом случае очевидна.

Пусть теперь ни одна из клеток не отмечена более чем в двух карточках. Ясно, что найдется клетка A, отмеченная в двух карточках. В каждой из 6 других карточек будет отмечено по 6 клеток из 35 (кроме A), откуда, по принципу Дирихле, среди этих 35 клеток найдется клетка B, отмеченная в двух карточках. Проигрышными здесь можно объявить A, B и по одной отмеченной клетке из каждой карточки (каковых будет не более 4), где ни A, ни B не отмечены.

Вторая задача решается совершенно аналогично.

Замечание. Сформулируем более общую задачу. Имеются одинаковые карточки по N клеток, на каждой из которых надо заполнить некоторые K клеток, после чего L клеток будут объявлены проигрышными. Какое наименьшее число карточек $m = m(N, K, L)$ надо заполнить, чтобы среди них нашлась выигрышная? Общий ответ, видимо получить здесь очень трудно. (Один частный случай предлагался в этом году на заочной Соросовской олимпиаде; некоторые участники доказали, что $m(10, 4, 3) = 10$, но решение требовало непростого перебора вариантов.)

С.Токарев