M1583. *Докажите, что а) медиана произвольного тетраэдра (отрезок, соединяющий вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани) меньше среднего арифметического длин ребер, выходящих из той же вершины; б) биссектриса тетраэдра (отрезок, идущий от вершины до противоположной грани и одинаково наклоненный к граням, содержащим эту вершину) меньше полусуммы длин ребер, выходящих из той же вершины. в) Верно ли для биссектрисы неравенство из пункта а)?*

а) Напомним вначале доказательство аналогичного неравенства для треугольника:

$$m_a < \frac{b+c}{2}. \qquad (*)$$

Достаточно достроить треугольника ABC до параллелограмма $ABA'C$: в треугольнике $AA'C$ будет $2m_a < AC + CA' = b + c$. Видим также, что $\vec{AC} + \vec{CA'} = \vec{AC} + \vec{AB} = 2\vec{AD}$, где $\vec{AD}$ — медиана. Последнее равенство можно получить и по-другому, сложением двух очевидных равенств $\vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DB}$ и $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC}$. Из $2\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$ снова получаем (*).

Исходя из (*), легко дать геометрическое доказательство а).

Пусть ABC — основание тетраэдра $ABCD$, DM_1 — медиана треугольника ABD. Рассмотрим треугольник CDM_1, в нем $CM = 2MM_1$. Отобразим D симметрично относительно M_1: в треугольнике CDD' отрезок CM_1 — медиана. Следовательно, $DM = \frac{2}{3}m_D$.

Имеем: $m_D < \frac{2DM_1 + DC}{2}$, $2DM_1 < DA + DB$.

Следовательно, $\frac{3}{2}DM < \frac{1}{2}(DA + DB + DC)$, что и требовалось доказать.

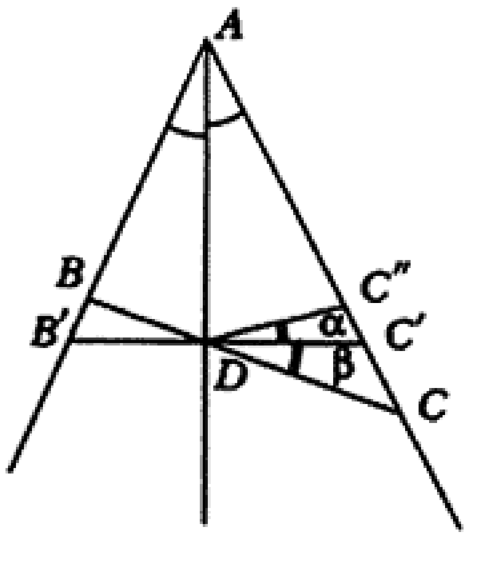
Аналогично можно получить векторное равенство $\frac{1}{2}((\vec{DA} + \vec{DB}) + \vec{DC}) = \frac{3}{2}\vec{DM}$, из которого сразу следует а).

б) Заметим вначале, что справедлив плоский аналог неравенства задачи — неравенство

$$l_a < \frac{b+c}{2} \qquad (**)$$

для треугольника. Это неравенство легко доказывается, разумеется, если воспользоваться какой-либо из различных формул для биссектрисы l_a либо векторами. Но можно доказать (**) и геометрически.

Пусть AD — биссектриса треугольника ABC. Проведем через точку D прямую $B'C' \perp AD$ (см. рисунок).



Так как $AD < AB' = \frac{AB' + AC'}{2}$, то достаточно доказать, что $BB' < CC'$.

Так как $\alpha > \beta$, то $DC > DC''$. Следовательно, $CC' > C''C'$. Но $C''C' = BB'$.

Вот иное доказательство. По свойству биссектрисы $BD < CD$. Значит, $B_1D < C_1D$, где $B_1(C_1)$ — проекция точки $B(C)$ на прямую AD. Следовательно, $BB' < CC'$ (поскольку эти два отрезка образуют с AD одинаковые углы).

Для получения еще одного геометрического доказательства (**) достаточно воспользоваться (*) и легко доказываемым фактом: во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

Приступим теперь к доказательству неравенства задачи.

Пусть $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$ — боковые ребра тетраэдра $ABCD$, l_A — его биссектриса, идущая от вершины A.

Пусть далее $b \ge c \ge d$; вписанный шар касается ACD в точке P. Обозначим через O центр вписанного шара; через l — пересечение плоскостей AOP и BCD; через M — точку пересечения прямых AP и l. Таким образом, AM — касательная к шару в сечении AOP, M — точка пересечения прямых l и CD. Пусть AN — вторая касательная к шару в этом сечении (точка N лежит на прямой l). Рассмотрим треугольник AMN и воспользуемся (**). Имеем:

$$l_A < \frac{AM + AN}{2} < \frac{c+b}{2} < \frac{b+c+d}{2}.$$

в) Нет.

Рассмотрим следующую конструкцию. Пусть в тетраэдре $ABCD$ будет $AB = AC$, $DB = DC$, $l_A = AE$, F — середина отрезка BC, $AF > AD$. Устремим $x = BF = CF$ к нулю. При этом E стремится к F. Следовательно, $AE \to AF$, $\frac{b+c+d}{3} \to \frac{2AF + AD}{3}$. Но $\frac{2AF + AD}{3} < AF$.

Замечания. 1. Вместо числа 3 можно взять любое $2 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

2. Разберемся теперь и в ситуации с l'_A («биссектрисой», равноудаленной от лучей).

Легко построить пример, когда $l'_A = 1$, $b + c + d \to 0$.

Если l'_A лежит внутри $ABCD$, то оценка прежняя:

$$l'_A < \frac{b+c+d}{2}$$

(доказательство: l'_A оценивается сверху выходящей из A биссектрисой одной из боковых граней).

Покажем, что эта оценка неулучшаема.

Возьмем треугольник ABC, $AB = AC = 1$, $l_{BAC} > \frac{2}{2+\varepsilon}$ (где $\varepsilon > 0$). Пусть A — вершина конуса, AB и AC — его образующие, l_{BAC} — его ось.

Осталось выбрать D так, чтобы было $\frac{2 + AD}{2+\varepsilon} < l_{BAC}$.

В.Сендеров

M1584. *Бесконечная последовательность чисел a, b, c, d, ... получается сложением двух геометрических прогрессий. Может ли она начинаться такими четырьмя числами a, b, c, d:*

а) 1, 1, 3, 5; б) 1, 2, 3, 5; в) 1, 2, 3, 4; г) 1, 2, 3, 2?

д) Докажите, что если первые четыре члена a, b, c, d — рациональные числа, то все члены последовательности — рациональные.

Пусть эти прогрессии ux^{n-1} и vy^{n-1} ($n = 1, 2, 3, \dots$), так что $a = u + v$, $b = ux + vy$, $c = ux^2 + vy^2$, $d = ux^3 +$