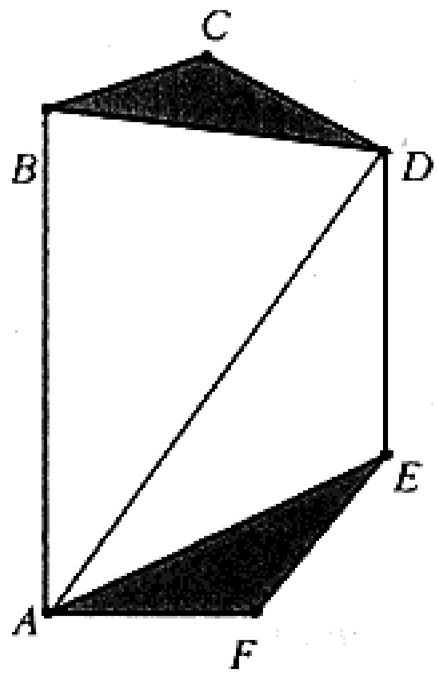

Рис.2

шесть равенств, аналогичных (1), получим, что известная нам сумма S' площадей треугольников ABC', BCD', CDE', DEF', EFA', FAB' равна сумме $(S_1+S_2)/2$, где S_1 — сумма площадей шести треугольников ABC, BCD, ..., отрезаемых малыми диагоналями, а S_2 — сумма площадей треугольников ABD, BCE, CDF, DEA, EFB, FAC, полученных «циклическим сдвигом» вершин из ΔABD. С другой стороны, разрезав шестиугольник так, как показано на рисунке 2, и еще двумя аналогичными способами, получающимися из этого разрезанная «циклическим сдвигом» (в том же направлении $A \to B \to C \to \ldots$), для площади S шестиугольника получим равенство $3S = S_1 + S_2$. Отсюда $S = 2S'/3$.

Н.Васильев

М1580. *Можно ли несколькими отрезками и дугами разрезать круг на части так, чтобы сложить из этих частей равновеликий квадрат?*

Разумеется, нет. Предположим, что такое разрезание возможно. Рассмотрим кусочки, составляющие квадрат. Выберем из них все те, в границу которых входят дуги, которые будут составлять границу круга или являются дугами того же радиуса r. В квадрате суммы длин этих дуг, к которым кусочки примыкают «снаружи» и «изнутри» (с выпуклой и вогнутой стороны), очевидно, равны. А в круге разность между теми и другими должна равняться длине окружности πr. Получили противоречие.

А.Белов

М1581. *а) Существует ли шестизначное число A такое, что среди чисел A, 2A, 3A, ..., 500 000A ни одно не оканчивается шестью одинаковыми цифрами?*
б) Для каждого целого $k > 1$ найдите наименьшее натуральное $N = N(k)$ такое, что при любом натуральном A хотя бы одно из чисел A, 2A, 3A, ..., NA оканчивается k одинаковыми цифрами.*

Ответ: а) существует, б) $k = 10^n - 9$. Решим сразу б). Заметим сразу, что для A кратного 5 или 2 легко указать число K (соответственно, $K = 2\cdot 10^{n-1}$ или $K = (5\cdot 10^{n-1})$ из первой половины ряда 1, 2, ..., 10^n, для которого KA оканчивается n нулями. Поэтому A следует искать среди чисел, взаимно простых с 10. Основная идея решения заключена в такой (известной) лемме.

Лемма. *Пусть A взаимно престо с 10. Тогда числа A, 2A, ..., $10^n A$ дают при делении на 10^n (в некотором порядке) все возможные остатки по одному разу.* (Другими словами, число KA может оканчиваться любыми n цифрами.) В самом деле, остатки при делении на 10^n чисел MA и KA при $|M-K| < 10^n$ различны, поскольку $(M-K)A$ не делится на 10^n, а всего остатков ровно 10^n: 0, 1, ..., 10^{n-1}, т.е. среди остатков чисел KA ($K = 1, 2, \ldots, 10^n$) каждый встретится один раз. Остается найти такое число A, что остатки E, $2E$, ..., $9E$, где E — число, записываемое n единицами, появятся на 9 последних (перед $K = 10^n$) местах, т.е. при K от $10^n - 9$ до $10^n - 1$. Достаточно позаботиться, чтобы $(10^n - 1)A$ давало остаток E: $(10^n - 1)A = E + 10^n B$ при целом B. Тогда при $m = 2, \ldots, 9$ будет $(10^n - m)A = mE + 10^n(B - m + 1)$. Таким образом, на роль A нужно взять $10^n - E = 88\ldots89$.

С.Токарев

М1582. *Все точки плоскости Oxy с целыми координатами (x, y) раскрашены в два цвета — синий и красный. Докажите, что найдется бесконечное одноцветное (синее или красное) множество, симметричное относительно некоторой точки.*

Пусть множество Z^2 целочисленных точек (x, y) плоскости Oxy окрашено красным и синим цветом. Для точек $O(0, 0)$ и $A(1, 0)$ определим подмножества $S(O)$ и $S(A)$ множества Z^2 следующим образом. Точку B из Z^2 отнесем к подмножеству $S(O)$, если точка, симметричная точке B относительно точки O, имеет тот же цвет, что и точка B. Аналогично, точку B из Z^2 отнесем к подмножеству $S(A)$, если точка, симметричная точке B относительно точки A, имеет тот же цвет, что и точка B. Если по крайней мере одно из подмножеств $S(O)$, $S(A)$ бесконечно, то, как легко заметить, задача решена. Поэтому далее мы предполагаем подмножества $S(O)$, $S(A)$ конечными.

Выберем натуральное число m так, чтобы m превышало абсолютные значения ординат $|y|$ всех точек (x, y) подмножеств $S(O)$, $S(A)$. Пусть для определенности точка $M_0(0, m)$ красная. Так как точка M_0 не принадлежит подмножеству $S(O)$, то точка $M_0'(0, -m)$ синяя. По выбору числа m, точка M_0' не принадлежит подмножеству $S(A)$. Значит, точка $M_1(2, m)$, симметричная точке M_0' относительно точки A, красная. Заменяя в наших рассуждениях точку M_0 точкой M_1, приходим к заключению, что точка $M_2(4, m)$ также красная. Продолжая рассуждения, получаем, что для любого натурального числа k точка $M_k(2k, m)$ красная. Далее, отразим точку M_0 относительно точки A, а затем полученную точку отразим относительно точки O. Получим красную точку $M_{-1}(-2, m)$. Таким же образом от точки M_{-1} переходим к красной точке $M_{-2}(-4, m)$ и т.д. В итоге все точки подмножества $\{M_n$: n — произвольное целое число$\}$ оказываются красными. Осталось заметить, что это подмножество симметрично относительно точки M_0.

Замечание. Множество целочисленных точек плоскости легко раскрасить в три цвета так, чтобы не было одноцветных бесконечных подмножеств, симметричных относительно некоторой точки плоскости. В этой связи возник ряд вопросов, ответы на которые автору неизвестны. Вот лишь два из них.

1. Можно ли множество целочисленных точек пространства окрасить в три цвета так, чтобы не было бесконечных одноцветных подмножеств, симметричных относительно некоторой точки пространства? Такая раскраска в четыре цвета существует.
2. Верно ли, что для любого раскрашивания точек прямой в четыре цвета найдется бесконечное одноцветное подмножество, симметричное относительно некоторой точки прямой? Для раскрашивания в три цвета это так.

И.Протасов