отношении

$$\frac{BH}{AD} = \frac{BH}{BC} = \frac{c\cos\beta}{a} = \frac{\sin\gamma\cos\beta}{\sin\alpha}. \quad (2)$$

Биссектриса же CL делит сторону HA треугольника HAC в отношении

$$\frac{HC}{CA} = \cos\gamma. \quad (3)$$

Отношения (2) и (3) равны в том и только в том случае, когда $\sin\gamma\cos\beta = \cos\gamma\sin\alpha$, что эквивалентно условию (1).

Таким образом, условие (1) эквивалентно тому, что AH, BK и CL пересекаются в одной точке.

Замечания. 1. Для треугольника задачи $\left|\angle BAC - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2} - \angle BAH$ тогда и только тогда, когда $\angle BCA > \frac{\pi}{4}$. Это легко следует из (1).

2. Из предыдущего замечания сразу следует, что если в остроугольном треугольнике ABC биссектриса CL, медиана BK и высота AH пересекаются в одной точке, то $\angle BCA > \frac{\pi}{4}$.

Это — задача IV Всесоюзной математической олимпиады (см. книгу Н.Б.Васильева и А.А.Егорова «Задачи Всесоюзных математических олимпиад» — М.: Наука, 1988; задача 135).

Нетрудно показать, что для любого угла BAC треугольник задачи существует. Из этого следует, что для тупоугольного треугольника задачи неравенство $\angle ACB \ge \pi/4$ выполняется не всегда.

3. Если в неостроугольном треугольнике ABC высота AH, медиана BK и биссектриса CL пересекаются в одной точке, то $\angle ACB > \angle ABC$. Это можно доказать геометрически, но проще — с помощью (1).

Л.Альтшулер, В.Сендеров

М1578. *Докажите, что не существует никакой (даже разрывной) функции $y = f(x)$, определенной при всех x, для которой*

$$f(f(x)) = x^2 - 1997.$$

Основная идея решения: разобраться, как устроены *орбиты* отображения $x \to g(x) = x^2 - 1997$, т.е. последовательность

$$x,\ g(x),\ g(g(x)),\ldots$$

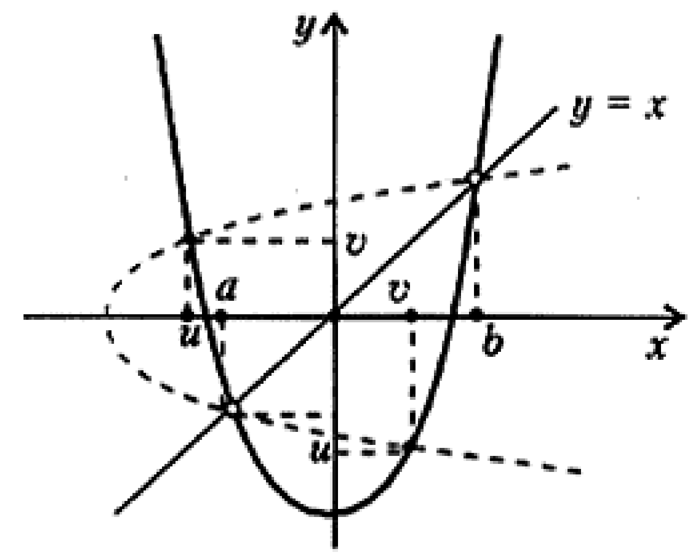
Нетрудно видеть, что при достаточно большом q, скажем, $q > 1$ (в частности, при $q = 1997$), функция $g(x) = x^2 - q$ имеет две *неподвижные точки* — это корни уравнения $g(x) = x$; обозначим их a и b. Кроме a и b, уравнение $g(g(x)) = x$ имеет еще два корня — обозначим их u и v. Чтобы их найти, достаточно заметить, что многочлен

$$g(g(x)) - x = \left(x^2 - q\right)^2 - q - x$$

делится на $g(x) - x = x^2 - x - q$, и разложить его на множители:

$$x^4 - 2qx^2 - x + q^2 - q = \left(x^2 - x - q\right)\left(x^2 + x - q + 1\right);$$

a и b — корни первого из трехчленов, u и v — второго. Они существуют и различны при $1 + 4(q-1) > 0$,



т.е. при $q > 3/4$. При этом $g(u) = v$, $g(v) = u$. Все это хорошо видно из рисунка. Таким образом, точки u, v образуют единственный цикл $u \to v \to u$ порядка 2 отображения $x \to g(x)$.

Предположим теперь, что $g(x) = f(f(x))$. Ясно, что неподвижные точки и циклы порядка 2 функции f — это неподвижные точки функции g, и обратно: если $f(a) = c$, то $f(c) = f(f(a)) = g(a) = a$, поэтому $g(c) = f(f(c)) = c$, т.е. $c = a$ или $c = b$.

А цикл порядка 2 функции g должен получаться из цикла порядка 4 функции f: если $f(u) = z$, то $f(z) = v$; если $f(v) = w$, то $f(w) = u$. При этом z, w отличны от a, b, v, u (и друг от друга). Но тогда $g(z) = f(f(z)) = w$, $g(w) = z$.

Таким образом, у функции g должен быть еще один цикл порядка 2, отличный от $u \to v \to u$. А такого у функции $g(x) = x^2 - q$ нет.

Замечание. Поскольку в задаче допускаются и разрывные функции f, мы никак не можем использовать специфические свойства множества $\mathbf{R}$, на котором определена функция $g(x) = x^2 - q$, и поэтому единственная информация о ней, которую нужно использовать — это структура орбит: сколько из них конечных (циклических), какие сливаются в одну орбиту и т.п.

Н.Васильев, М.Смуров, С.Богатый

М1579. *Пусть A', B', C', D', E', F' — середины сторон AB, BC, CD, DE, EF, FA произвольного выпуклого шестиугольника $ABCDEF$. Известны площади треугольников ABC', BCD', CDE', DEF', EFA', FAB'. Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$.*

Заметим, что

$$S_{ABC'} = \left(S_{ABC} + S_{ABD}\right)/2, \quad (1)$$

поскольку все эти три треугольника имеют общее основание AB (рис.1), а высота $\Delta ABC'$ равна полусумме высот ΔABC и ΔABD, опущенных на AB. Сложив

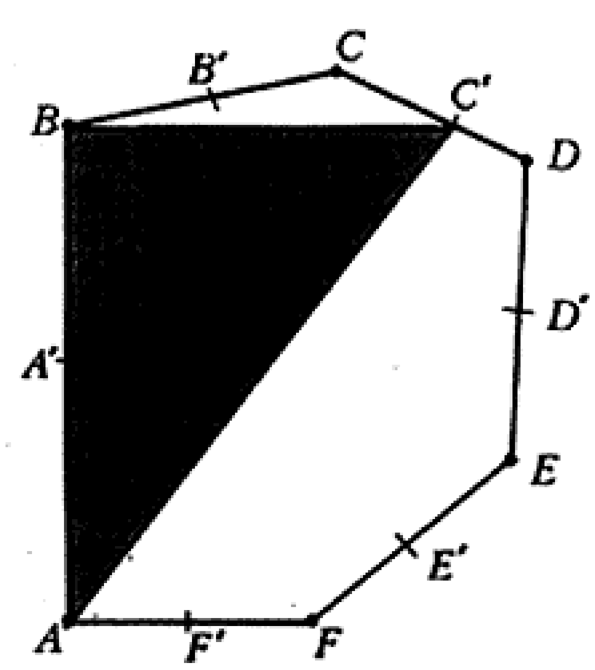


Рис.1