Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 1997 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4 — 97» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1601» или «Ф1608». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1601—М1603 предлагались на LX Московской математической олимпиаде, задача М1604 — на весеннем туре Турнира городов, М1605 — на втором (очном) туре Соросовской олимпиады по математике.

Задачи Ф1608 — Ф1612 предлагались на Московской физической олимпиаде.

Задачи М1601 — М1605, Ф1608 —Ф1612

М1601. Пусть $f(x)$ — нечетная возрастающая функция. Докажите, что для любых чисел a, b и c, сумма $a + b + c$ которых равна 0, выполнено неравенство

$$f(a)f(b)+f(b)f(c)+f(c)f(a)\le 0.$$

В.Произволов

М1602. 1997 фишек расположены на плоскости в вершинах выпуклого 1997-угольника. За один ход можно разбить их на две группы и фишки первой группы сдвинуть на какой-нибудь вектор, а остальные фишки — оставить на месте. Может ли случиться, что после а) 9, б) 10 ходов все фишки окажутся на одной прямой?

М.Евдокимов

М1603. а) Фигура M на плоскости Oxy представляет собой пересечение единичного квадрата $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ с полуплоскостью $ax + by \le c$ (a, b и c — положительные числа). Докажите, что площадь M вычисляется по формуле

$$\frac{1}{2ab}\left((c)_+^2-(c-a)_+^2-(c-b)_+^2+(c-a-b)_+^2\right),$$

где $(x)_+$ означает наибольшее из чисел x и 0: $(x)_+ = \max\{x,0\}$. б) Выведите аналогичную формулу для объема многогранника M в пространстве $Oxyz$, представляющего собой пересечение единичного куба $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$ с полупространством $ax + by + cz \le d$ (a, b, c и d — положительные числа).

А.Канель-Белов

М1604. Внутри выпуклого многоугольника F расположен второй выпуклый многоугольник G. Хорда многоугольника F — отрезок, концы которого лежат на границе F, — называется *опорной* к многоугольнику G, если она пересекается с G только по границе: содержит либо одну вершину, либо сторону G. Докажите, что
а) найдется опорная хорда, середина которой лежит на границе G;
б) найдутся по крайней мере две такие хорды.

В.Дольников, П.Пушкарь

М1605. Имеются N карточек, на которых написаны различные (неизвестные) числа. Они разложены на столе по кругу числами вниз. Надо найти три какие-нибудь лежащие рядом карточки такие, что число, написанное на средней карточке, больше, чем на каждой из двух соседних. При этом разрешается перевернуть последовательно не более k карточек. Докажите, что это возможно, если а) $N = 5$, $k = 4$; б) $N = 76$, $k = 10$; в) $N = 199$, $k = 12$.

В.Протасов

Ф1608. Мэр одного городка начал получать жалобы на большую автомобильную пробку перед светофором на главной улице. Скорость машин при движении составляла 6 м/с, а средняя скорость продвижения по пробке — всего 1,5 м/с. При этом время свечения светофора зеленым светом было равно времени свечения красным (время свечения желтым пренебрежимо мало). Мэр распорядился увеличить время свечения зеленым светом в 2 раза, оставив прежним время свечения красным. Чему станет равна средняя скорость продвижения машин по пробке? Считать, что скорость машин при движении не изменилась. Учесть, что при