созвездия под названием «Салфетка Серпинского» они малозаметны и никак не влияют на общую картину.

Типичность универсальной последовательности

Сейчас нам остается объяснить, почему последовательность $\mathcal{A}$, выдаваемая при игре «Хаос», всегда (точнее сказать: «почти всегда») является универсальной. Здесь мы вторгаемся в святая святых теории вероятностей, о которой в школьной математике не говорится ни слова. Поэтому наше объяснение нельзя считать доказательством. Это лишь идеи, на которых можно построить строгое доказательство.

Итак, мы исходим из того, что бросаемая нами кость совершенно симметрична и при каждом бросании шансы выпасть у каждой из трех цифр одинаковы. Поэтому можно предполагать, что все троичные последовательности $\mathcal{A}$ между собой равноправны. Последовательность, состоящая, скажем, из одних n нулей 000...0 имеет шанс выпасть не больше и не меньше, чем, скажем, последовательность из n чисел 012012..., в которой все цифры равномерно перемешаны. Троичных (бесконечных) последовательностей бесконечно много, поэтому каждая такая фиксированная последовательность, в том числе и каждая универсальная последовательность, имеет один и тот же бесконечно ничтожный шанс выпасть в результате бросания кости.

Но нас не интересует *конкретная* универсальная последовательность. Нам нужно выяснить, насколько часто выпадает вообще *какая-то* универсальная последовательность. Покажем, что универсальные последовательности должны выпадать несравнимо чаще, чем остальные.

Чтобы показать это, сопоставим каждой троичной последовательности $\mathcal{A}$ конкретное действительное число

$0\le\tau\le1$, которое равно $\tau=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{3^n}$.

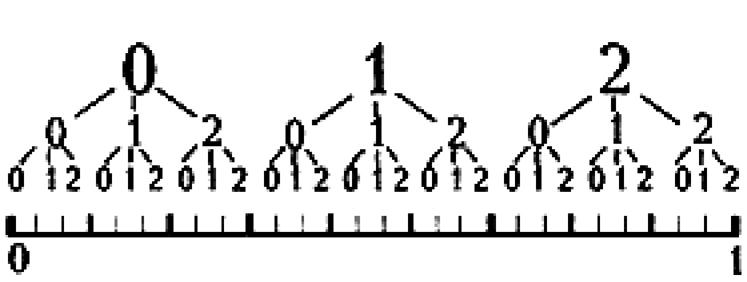

Рис. 8

Указанное соответствие между троичными последовательностями вида $\mathcal{A}$ и действительными числами на отрезке $[0,\,1]$ устанавливается точно так, как это делается при разложении действительного числа в десятичную дробь (рис. 8).

Последовательность $\mathcal{A}=(\alpha_n)$ можно рассматривать одновременно как разложение числа τ в «троичную» дробь и как троичный адрес точки τ на отрезке $[0,\,1]$.

Поэтому выбор случайной последовательности $\mathcal{A}$ равносилен тому, что мы случайным образом выбираем точку на отрезке $[0,\,1]$. Ткнем наугад иголкой в какую-нибудь точку на отрезке $[0,\,1]$. Мы будем предполагать, что иголка столь остра, что известный вопрос — сколько чертей сидит на конце иглы — имеет ответ: только один. Вопрос: каков шанс того, что действуя наугад мы попадем в точку, лежащую на отрезке $[0,\,1/2]$? Ответ: пятьдесят на пятьдесят — можно считать правильным. Он соответствует духу геометрической вероятности: чем меньше длина отрезка, тем меньше шанс в него попасть.

А каков с этой точки зрения шанс того, что мы попадем в точку x, которая принадлежит отрезку $[1/3,\,1]$? Геометрическая вероятность попасть в такую точку равна отношению длины этого отрезка к длине $[0,\,1]$, т.е. $2/3$.

Вероятность попадания в точку, принадлежащую хотя бы одному из двух (неперекрывающихся) отрезков, скажем $[4/9,\,2/3]$ и $[7/9,\,1]$, равна сумме их длин, т.е. $4/9$.

Эти численные примеры взяты не совсем случайно. Отрезок $[1/3,\,1]$ содержит все такие точки (и только такие), у которых в их троичном адресе на первом месте стоит не 0. Вторые два отрезка $[4/9,\,2/3]$ и $[7/9,\,1]$ состоят из точек, в адресе которых 0 отсутствует и на первом и на втором местах. Таким образом, вероятность попадания в точку, которая не содержит 0 на первых двух местах, равна $\left(\frac{2}{3}\right)^2$. Можно проверить, что вероятность того, что точка x в своем адресе не содержит 0 ни на одном из первых n мест, равна $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Вообще, можно показать следующее.

Задача 5. Для фиксированного троичного слова w_k длины k, рассмотрим множество $M_n(w_k)$ точек, в адресе которых на первых n местах ни разу не содержится слово w_k. Если L_n — сумма длин отрезков, содержащих точки из $M_n(w_k)$, то

$$L_1=\ldots L_{k-1}=1$$

и

$$L_n=\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)\cdot L_{n-1}\ \text{для}\ n\ge k. \qquad (6)$$

Для любого фиксированного k суммарная длина L_n стремится к нулю, если $n\to\infty$. Таким образом, вероятность попадания в точку, адрес которой не содержит хотя бы одну комбинацию фиксированной длины, равна нулю. Таким образом, если бы игра «Хаос» продолжалась неограниченно долго, то в результате получалась бы, как говорят «с вероятностью единица», универсальная последовательность.

На практике же мы имеем дело не с бесконечной последовательностью, а с конечной, состоящей, скажем, из $n=5000$ чисел. Подсчитаем суммарную длину L_{5000} интервалов, адреса точек которых не содержат на первых 5000 местах хотя бы одного слова длины 5. По формуле (6) суммарная длина равна

$$L_{5000}=\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)^{5000-5}\approx10^{-10}.$$

Таким образом, вероятность того, что на первой тысяче шагов выпадет любое слово длины 5, очень близка к единице. Более того, весьма вероятно, что такое слово выпадет не единожды. Это означает, что среди первых 5000 точек с вероятностью $1-10^{-10}=0{,}9999999999$ для *любой* точки x из салфетки Серпинского найдется такая точка орбиты, которая будет отстоять от x на расстояние порядка 10^{-3} (длина стороны исходного треугольника $A_0A_1A_2$ принимается за единицу). Даже эти, грубоватые, оценки подтверждают, что орбита X, получающаяся в игре «Хаос», действительно, должна хорошо имитировать салфетку Серпинского.

В заключение отметим, что салфетка Серпинского является *фракталом* в смысле определения Мандельброта, о котором упоминалось выше. Дело в том, что так называемая хаусдорфова размерность салфетки Серпинского есть нецелое число, равное $\frac{\log_3}{\log_2}\approx1{,}584$ ...(!) Почему?... Это — предмет другой статьи.