которые расположены «далеко» от предела 0, если присмотреться, тоже можно заметить. Но этих точек, благодаря высокой скорости сходимости последовательности, совсем немного, расположены они изолированно и на общую картину не влияют. (От скорости схождения существенно зависит портрет орбиты. Действительно, возьмем последовательность 1, 0,999, ..., 0, 999^n, ... Ее предел будет тем же, что и у предыдущей последовательности. Однако сходится она к 0 медленно, и ее портрет будет совершенно другим. Он будет выглядеть как множество точек, распределенное по всему отрезку, постепенно сгущающееся в окрестности нуля.) Мы покажем, что в игре «Хаос» мы получаем орбиту X, «предел» которой есть целое множество точек — салфетка Серпинского. Причем орбита «сходится» к своему «пределу» весьма быстро потому, что коэффициент подобия $\frac{1}{2}$ намного меньше единицы.

Пусть дана орбита $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Точка y называется *предельной* для орбиты X, если для любого положительного ε найдется бесконечно много точек из X, которые лежат в ε-окрестности точки y. Точка y — некоторая точка плоскости, вообще говоря, не принадлежащая орбите. Заметим, что в случае, когда орбита X является сходящейся в известном смысле последовательностью, то ее предел является *единственной* предельной точкой. Но, вообще говоря, орбита X может иметь много предельных точек. Множество *всех* предельных точек y для орбиты X называется *предельным* множеством орбиты X. Обозначим его через $Lim X$.

Возьмем фиксированную последовательность преобразований подобий $\{h_{\alpha_i}\}$, $\alpha_i = 0$, 1 или 2, и рассмотрим «параллельные» орбиты X и X' двух различных начальных точек x_0 и x_0'. Оказывается, эти орбиты, хотя и различны, имеют одно и то же предельное множество:

$$Lim X = Lim X'.$$

Причина этого, на первый взгляд неожиданного, утверждения — в том, что точки параллельных орбит с одинаковыми номерами сближаются при увеличении номера n. Действительно, так как h_i есть гомотетия с коэффициентом $1/2$, то для расстояний между соответствующими точками имеем

$$|x_1, x_1'| = \frac{1}{2}|x_0, x_0'|,$$

$$|x_2, x_2'| = \frac{1}{2}|x_1, x_1'| = \frac{1}{2^2}|x_0, x_0'|, \ldots$$

$$\ldots, |x_n, x_n'| = \frac{1}{2}|x_{n-1}, x_{n-1}'| = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{2^n}|x_0, x_0'|. \quad (5)$$

Пусть y — предельная точка для орбиты X. Тогда в любой маленькой окрестности точки y найдется бесконечно много точек из орбиты X: x_{n_1}, $x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ Но так как согласно (5) орбиты сближаются, то в любой маленькой окрестности найдется бесконечно много точек из орбиты X' также. Таким образом, точка y является предельной и для орбиты X'. И обратно, совершенно симметрично, всякая предельная точка для орбиты X' есть предельная точка и для X. Таким образом, $Lim X = Lim X'$.

Универсальные последовательности и салфетка Серпинского

Последовательность $\mathcal{A}$ чисел 0,1 и 2 назовем *универсальной*, если она содержит *любой* конечный набор чисел 0, 1 или 2.

Легко дать примеры НЕуниверсальной последовательности: 000..., 111... или 012012012... Первый пример универсальной последовательности, который приходит в голову, это — последовательность, в которой сначала выписываются все слова из 0, 1 и 2 длины 1, затем все слова из тех же цифр длины 2, за ними все слова длины 3 и т.д.

Это — весьма искусственная последовательность. На первый взгляд кажется, что универсальная последовательность — это относительно редкий объект во множестве всех бесконечных последовательностей. Однако ниже мы объясним, что как раз наоборот, универсальная последовательность — это типичная последовательность, а неуниверсальные последовательности составляют исключение, подобно тому, как периодические десятичные дроби составляют исключение среди всех вообще действительных чисел.

Теперь мы готовы сформулировать теорему, которая является ключом к ответу на наш основной вопрос: почему орбита на «фотографии» выглядит как салфетка Серпинского.

Теорема. *Пусть* $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ *— универсальная числовая последовательность и X — соответствующая орбита произвольной точки x_0. Тогда $Lim\ X = T_C$.*

Идея доказательства теоремы. Как мы уже знаем, для фиксированной последовательности $\mathcal{A} = \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ предельное множество $Lim X$ не зависит от выбора начальной точки. Поэтому в качестве начальной точки можно взять произвольную точку из салфетки Серпинского. По доказанному выше, для точки x из салфетки T_C ее образ $h_{\alpha_i}(x)$ также принадлежит салфетке и его адрес начинается с числа α_i. Поэтому адрес n-й точки орбиты X начинает с $\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2\alpha_1$.

Возьмем произвольную точку из салфетки y, она имеет адрес $адр(y) = a_1 \ldots a_m \ldots$ Пусть $w = a_m \ldots a_1$ есть слово, состоящее из первых m знаков адреса точки y, взятых в обратном порядке. Так как $\mathcal{A}$ — универсальная последовательность, то $\mathcal{A}$ содержит хотя бы раз (и следовательно, как легко показать, бесконечно много раз) слово w. Возьмем отрезок последовательности $\mathcal{A}$ некоторой длины n, который заканчивается этим словом: $a_1 \ldots a_{n-m} a_m \ldots a_1$. Это означает, что соответствующая точка орбиты $x_n = h_{\alpha_1}(\ldots h_{\alpha_m}(x_{n-m}))$ имеет адрес, начинающийся, как и адрес точки y, с $a_1, \ldots, a_m$. Отсюда следует, что расстояние $|x_n, y| < \frac{1}{2^m}$, где за единицу принята длина стороны исходного треугольника. Так как m может быть сколь угодно большим, то произвольная точка y из салфетки является предельной точкой орбиты X.

Можно показать, что и, обратно, любая предельная точка для орбиты X принадлежит салфетке Серпинского.

Таким образом, из теоремы следует, что в случае *универсальной* последовательности $\mathcal{A}$ каждая точка салфетки Серпинского притягивает к себе неограниченно много точек орбиты. Образующиеся на экране сгущения вокруг точек салфетки создают зрительное восприятие салфетки Серпинского. Точки орбиты, которые отстоят от салфетки, тоже присутствуют на фотографии «достаточно далеко», их тоже можно разглядеть. Но так как они расположены изолированно, то на фоне яркого