удаляется ни на каком этапе. Вершина A_0 имеет единственный адрес $адр(A_0) = 000\ldots$ Вершина A_1 имеет адрес $адр(A_1) = 111\ldots$

С другой стороны, середина A_{12} стороны A_1A_2 принадлежит одновременно двум последовательностям вложенных треугольников вида (1)

$$T_1^1 \supset T_{12}^2 \supset T_{122}^3 \supset \ldots$$

и

$$T_2^1 \supset T_{21}^2 \supset T_{211}^3 \supset T_{2111}^4 \supset \ldots$$

и поэтому имеет два различных адреса: 1222... и 2111... (см. рис. 7).

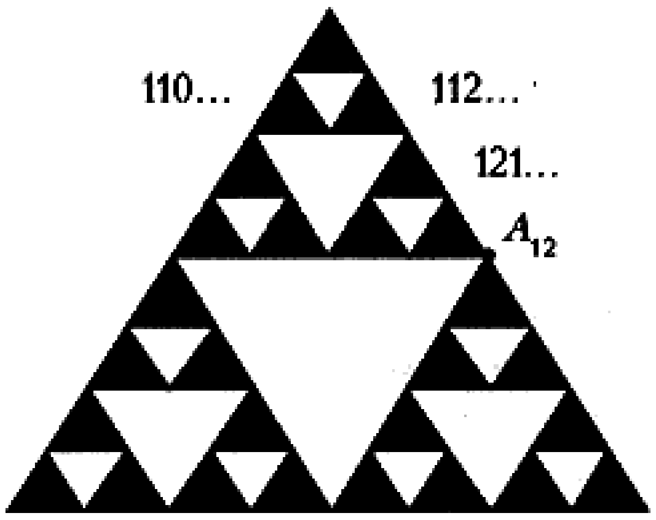

Рис. 7

Неоднозначность адреса, которая встречается у некоторых точек салфетки Серпинского, имеет в точности ту же природу, что и неоднозначность представления в виде десятичной дроби, которое имеется для некоторых действительных чисел. Например, число 0,129999... имеет также и другое представление: 0,13000...

Задачи

1. Покажите, что для i-й вершины треугольника n-го ранга все числа в ее адресе, начиная с $(n+1)$-го знака, равны i: $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = i$.

2. Покажите, что если точка x не является вершиной треугольника ранга n, но лежит на его стороне, параллельной стороне A_iA_j большого треугольника $A_0A_1A_2$ (здесь предполагается, что индексы i и j равны 0, 1 или 2), то все числа в адресе точки x с $(n+1)$-го знака равны i или j.

3. Покажите, что точка x из салфетки Серпинского имеет не более 2 адресов.

4. Докажите, что точка x из салфетки Серпинского с адресом $адр = a_1, a_2, \ldots$ имеет второй адрес тогда и только тогда, когда для некоторого n имеем $a_n \neq a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$ При этом второй адрес этой точки выражается через первый следующим образом:

$$a'_m = a_m, \text{ если } 1 \le m \le n-1,\ a'_n = a_n \text{ и } a'_{n+1} = a'_{n+2}.$$

Салфетка Серпинского самоподобна

Обозначим часть салфетки Серпинского, которая принадлежит треугольнику T_i^1, через T_i, $i = 0,1,2$ (см. рис.6). Ясно, что

$$T_c = T_0 \cup T_1 \cup T_2.$$

Обозначим через h_i преобразование гомотетии с центром в вершине A_i и коэффициентом гомотетии $1/2$. Возьмем одно из них, скажем h_0, и убедимся в том, что при нем салфетка Серпинского T_C отображается на T_0. Действительно, при гомотетии h_0 треугольник T_i^1 ранга 1 переходит в треугольник T_{0i}^2 ранга 2, и вообще, треугольник $T^n_{a_1\ldots a_n\ldots}$ ранга n переходит при h_0 в треугольник $T^n_{0a_1\ldots a_n\ldots}$ ранга $n+1$.

Пусть точка $x \in T_C$ имеет адрес $a_1a_2\ldots a_n\ldots$ Ей соответствует последовательность вложенных треугольников

$$T_{a_1}^1 \supset T_{a_1a_2}^2 \supset \ldots \supset T^n_{a_1a_2\ldots a_n} \supset \ldots \quad (3)$$

Последовательность (3) при h_0 переходит также в последовательность вложенных друг в друга треугольников:

$$T_0^1 \supset T_{0a_1}^2 \supset T_{0a_1a_2}^3 \ldots \supset T^{a+n}_{0a_1a_2\ldots a_n} \supset \ldots \quad (4)$$

Последовательности (4) соответствует точка $x' = h_0(x)$, которая также принадлежит салфетке. Адрес точки x' есть $0a_1a_2\ldots n\ldots$ Итак, под действием гомотетии h_0 каждая точка x салфетки T_C с адресом $a_1a_2\ldots n\ldots$ переходит в точку салфетки $x' = h_0(x)$ из T_0 с адресом $0a_1a_2\ldots n\ldots$, начинающимся с 0.

Верно и обратное: в любую точку x' салфетки из T_0, т.е. в точку с адресом $0a_1a_2\ldots n\ldots$, начинающимся с 0, переходит точка x со следующим адресом: $a_1a_2\ldots n\ldots$

Таким образом, доказано, что $h_0(T_C) = T_0$. Так как

$$T_C = T_0 \cup T_1 \cup T_2 = h_0(T_C) \cup h_1(T_C) \cup h_2(T_C),$$

то салфетка Серпинского есть объединение трех гомотетичных ей образов, и в этом смысле она *самоподобна*.

Попутно мы показали, что если точка $x \in T_C$ имеет адрес $адр(x) = a_1a_2a_3\ldots$, то адрес точки $x' = h_0(x) \in T_C$ следующий:

$$адр(h_0(x)) = 0a_1a_2a_3\ldots$$

Предельное множество для игры «Хаос»

Опишем игру «Хаос» при помощи гомотетий h_0, h_1, h_2. Действительно, по начальной точке x_0 и последовательности

$$\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots\}$$

чисел 0, 1, 2 каждую точку последовательности X в игре «Хаос» можно определить как образ предыдущей точки относительно некоторой гомотетии:

$$x_n = h_{\alpha_n}(x_{n-1}).$$

Так как коэффициент каждой гомотетии здесь равен $1/2$, то точка $x_n = h_{\alpha_n}(x_{n-1})$ есть середина отрезка $[x_{n-1}, A_{\alpha_n}]$.

Последовательность точек X называют *орбитой* точки x_0. Орбита X определяется, как мы видим, начальной точкой x_0 и последовательностью $\mathcal{A}$ чисел, которая задает последовательность преобразований гомотетии.

Прежде чем понять, почему при выведении на экран орбиты X получается салфетка Серпинского, заметим, что орбита не только не должна совпадать с салфеткой, но иногда вообще может не иметь с ней ни одной общей точки.

Для этого возьмем в качестве начальной точки x_0 какую-нибудь точку внутри центрального треугольника $A_{01}A_{12}A_{23}$ ранга 1, который, как мы знаем, не входит в салфетку Серпинскогом (см. рис. 6, *б*). Тогда точка орбиты $x_1 = h_{\alpha_1}(x_0)$ лежит внутри центрального треугольника ранга 2, который удаляется на втором этапе. Точно так же следующая точка орбиты $x_2 = h_{\alpha_2}(x_1)$ принадлежит центральному треугольнику, который удаляется на третьем этапе, и т.д. Таким образом, если точка x_0 принадлежит удаляемому на каком-то этапе центральному треугольнику, то орбита X не имеет с салфеткой Серпинского **ни одной** (!) общей точки. Но и в этом случае портрет орбиты имитирует салфетку Серпинского.

Объясним ключевую идею этого на простом примере. Возьмем последовательность $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ и выведем первую тысячу ее точек на экран. «Портретом» этой последовательности является... единственная предельная точка 0 для этой последовательности. Точки последовательности,