лежат ни одному из центральных треугольников произвольного ранга, т.е. множество, состоящее из тех точек, которые не удаляются ни на каком из этих этапов.

«Площадь» салфетки Серпинского равна *нулю*. В действительности, о площади салфетки Серпинского говорить в том смысле, в каком говорят в школе о площадях элементарных фигур, нельзя: она слишком «дырява» для того, чтобы иметь площадь в смысле школьного определения.

С другой стороны, если площадь исходного треугольника $A_0A_1A_2$ равна 1, а на первом шаге из него выбрасывается *один* центральный треугольник ранга 1 площади $1/4$, то площадь остатка $3/4$. На втором этапе из каждого оставшегося треугольника ранга 1 выбрасывается центральный треугольник. Это значит, что площадь остающейся после второго этапа части составляет опять $3/4$ площади того, что оставалось после первого этапа. Легко видеть, что после каждого следующего шага остается $3/4$ площади той фигуры, которая возникла на предыдущем. Т.е. после n-го шага площадь оставшейся части равна $(3/4)^n$. И когда мы говорим, что «площадь» салфетки Серпинского равна нулю, мы понимаем следующее: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую фигуру, что, с одной стороны, ее площадь не превосходит ε, а с другой стороны, эта фигура содержит салфетку.

Из каких точек состоит салфетка Серпинского? Легко понять, например, что любая точка, лежащая на границе треугольника *любого* ранга, принадлежит салфетке. Действительно, такая точка не принадлежит внутренности *ни одного центрального* треугольника *никакого* ранга, и следовательно, не выбрасывается ни на каком этапе. Т.е. граница треугольника любого ранга целиком входит в салфетку. Но это далеко не все точки, входящие в салфетку. Как же описать все вообще точки из T_C?

Точки салфетки Серпинского и их адреса

Пусть x — какая-то точка из T_C. По построению салфетки Серпинского, точка x обязана принадлежать хотя бы одному из треугольников ранга 1. Пусть номер этого треугольника есть a_1. Находясь в треугольнике $T^1_{a_1}$, точка x принадлежит хотя бы одному из треугольников ранга 2 (максимум двум), скажем треугольнику $T^2_{a_1a_2}$. На этом пути получаем, что точка x принадлежит бесконечной последовательности треугольников, каждый из которых содержится в предыдущем

$$T^1_{a_1} \supset T^2_{a_1a_2} \supset T^3_{a_1a_2a_3} \supset \ldots \supset T^n_{a_1a_2a_3\ldots a_n} \supset \ldots \qquad (1)$$

Точка x, в силу выбора треугольников, принадлежит *каждому* треугольнику последовательности (1).

Бесконечная последовательность

$$a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots \qquad (2)$$

называется *адресом* $адр(x)$ точки x. Итак, *каждой* точке x салфетки Серпинского можно поставить в соответствие ее адрес $адр(x)$, который является бесконечной последовательностью чисел 0, 1 или 2 (рис. 7).

Здесь возникает три вопроса. *Первый* — а не имеет ли тот же адрес, что и точка $x \in T_C$, какая-либо еще точка салфетки Серпинского? Другими словами, могут ли различные точки салфетки x и y иметь одинаковый адрес: $адр(x) = адр(y)$? Ответ: нет, по данному адресу «проживает» максимум одна точка салфетки.

Далее, последовательность (2) строилась как последовательность индексов треугольников, сходящихся к данной точке $x \in T_C$. Теперь возьмем произвольную последовательность $a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$, состоящую из чисел 0, 1 или 2. *Второй* вопрос: есть ли в T_C точка с таким адресом? Ответ: да, есть.

И наконец, *третий* вопрос: не может ли точка x иметь более одного адреса? Ответ здесь не совсем однозначный. Как правило, точки из салфетки Серпинского имеют единственный адрес. Но это правило «подтверждается» исключением: некоторые точки в салфетке имеют два (не более) адреса.

Ответ на первый вопрос имеет простое объяснение. Совпадение адресов у точек, скажем x и x', означает, что точки x и x' обе принадлежат каждому треугольнику последовательности (1). Но так как размеры треугольников уменьшаются на каждом этапе вдвое, то расстояние $|x, x'|$ не может быть отличным от нуля. Следовательно, $x = x'$.

Сложнее установить, почему последовательность (1) вложенных друг в друга замкнутых треугольников содержит хотя бы одну общую точку. В начале курса математического анализа имеется важная лемма о вложенных отрезках.

Лемма о вложенных отрезках. Если $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ — последовательность *замкнутых* отрезков таких, что

1) каждый следующий отрезок δ_{i+1} содержится в предыдущем отрезке δ_i,

2) длины $|\delta_i|$ отрезков стремятся к 0,

то *существует* и *только одна* точка, которая принадлежит одновременно *всем* отрезкам δ_n.

Из леммы о вложенных отрезках можно вывести аналогичную лемму о вложенных треугольниках.

Последовательность (1) *замкнутых* треугольников удовлетворяет следующим условиям:

1) треугольники из (1) последовательно вложены друг в друга и

2) размер треугольника следующего ранга вдвое меньше размера треугольника предыдущего, т.е. размеры треугольников в последовательности (1) стремятся к нулю. По лемме о вложенных треугольниках *существует одна и только одна* точка x, которая принадлежит всем треугольникам последовательности (1).

Так как каждой последовательности $a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$, состоящей из 0, 1 и 2, соответствует однозначно последовательность треугольников вида (1), по лемме о вложенных треугольниках последовательность имеет единственную общую точку x с адресом $адр(x) = a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$

Объясним ответ на третий вопрос. Допустим, точка x_0 *не является вершиной* никакого треугольника ранга n ни при каком значении n. Пусть она принадлежит треугольнику $T^n_{a_1\ldots a_n}$ ранга n. Тогда она принадлежит одному и только одному треугольнику $T^{n+1}_{a_1\ldots a_{n+1}}$ следующего ранга. Таким образом, последовательность $a_1\ldots a_n\ldots$ определяется однозначно. Если же точка x является вершиной треугольника $T^n_{a_1\ldots a_{n-1}a_n}$ и не являлась вершиной никаких треугольников предыдущих рангов, то она является вершиной еще одного треугольника ранга n $T^n_{a_1\ldots a_{n-1}a_n'}$. Очевидно, что первый адрес точки x имеет вид $a_1\ldots a_n\ a\ a\ldots$, а второй ее адрес — $a_1\ldots a_n'\ a'a'\ldots$

Рассмотрим для примера вершину A_0. Она принадлежит салфетке Серпинского, так как она не входит ни в один центральный треугольник и не