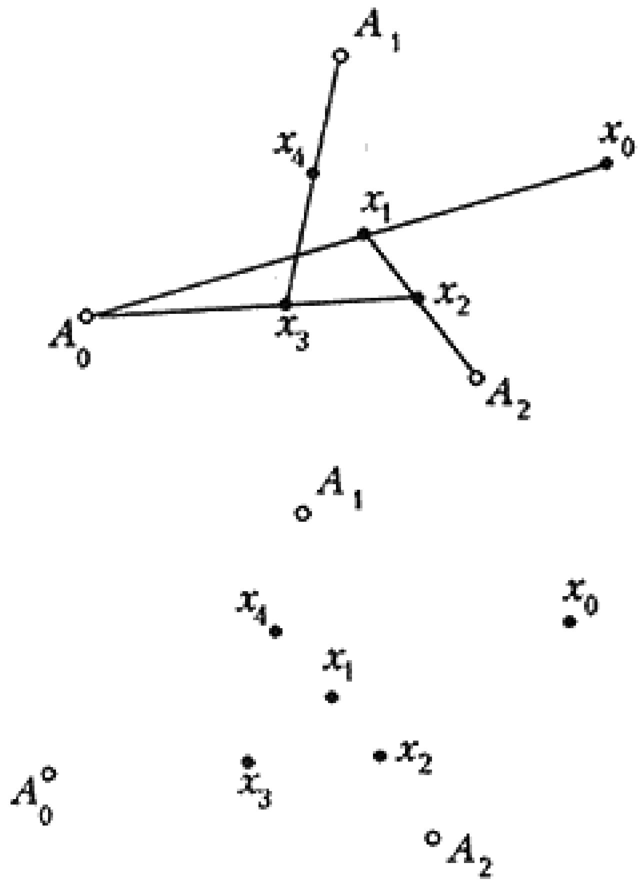

Рис. 4

Действуя таким образом, мы получаем последовательность

$$X = \{x_0, x_1, ..., x_n, ...\}$$

точек на плоскости. От чего она зависит? Разумеется, последовательность X зависит от выбора начальной точки x_0 и, конечно, от той случайной последовательности

$$\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...\}$$

чисел 0,1,2, которые выдаются нам при бросании кости. Как мы видим, здесь слишком много неопределенности: и начальная точка x_0 взята произвольно, и последовательность вершин совершенно случайна. Так что ожидать чего-то определенного от последовательности X не приходится. Выведем на дисплей компьютера первые, скажем, 100 точек последовательности (рис. 5,*а*). Как и ожидалось, ничего интересного. Чтобы убедиться в том, что действительно ничего особенного здесь не происходит, давайте добавим еще, скажем, точек пятьсот, благо выдаются они «не вручную», а компьютером. Опять, как говорится, не на что глаз положить... Хотя минуточку ... что-то новое проступило на рисунке 5,*б*, на котором показаны результаты игры после 500 шагов! Продолжим игру и выведем на дисплей 2000 точек (рис. 5,*в*)... Тот узор, который на рисунке 5,*б* только-только начал проявляться, на рисунке 5,*в* стал гораздо отчетливее. Рисунок 5,*г*, на котором отмечены уже 10000 точек, ничего нового, кроме дополнительной контрастности, не добавляет к рисунку 5,*в*. Последовательность рисунков 5,*а*—*г* напоминает фотографию в процессе проявления, когда сначала проступают какие-то размытые пятна, потом выступают вполне узнаваемые формы, которые в конце концов доводятся до необходимой контрастности.

Фигура на рисунке 5,*г* напоминает геометрическую конструкцию под названием *салфетка Серпинского*.[1] То, что в результате совершенно *случайного* процесса появился столь симметричный узор, — это абсолютно неожиданно. Однако чувствуется, что произошло это совершенно **неслучайно**. Действительно, можно повторять эксперимент опять и опять, беря каждый раз новые начальные точки x_0. Случайные последовательности чисел $\mathcal{A}$ будут, понятно, также разными. Однако при выводе точек последовательности X на дисплей результат будет неизменным: салфетка Серпинского.

Не правда ли, удивительно: последовательности точек X **разные**, случайные, а их «фотографии» выглядят совершенно **одинаково**. Второй, не менее интересный вопрос: как вообще случайность может порождать строгий порядок, присущий салфетке Серпинского? Задача статьи — объяснить этот феномен.

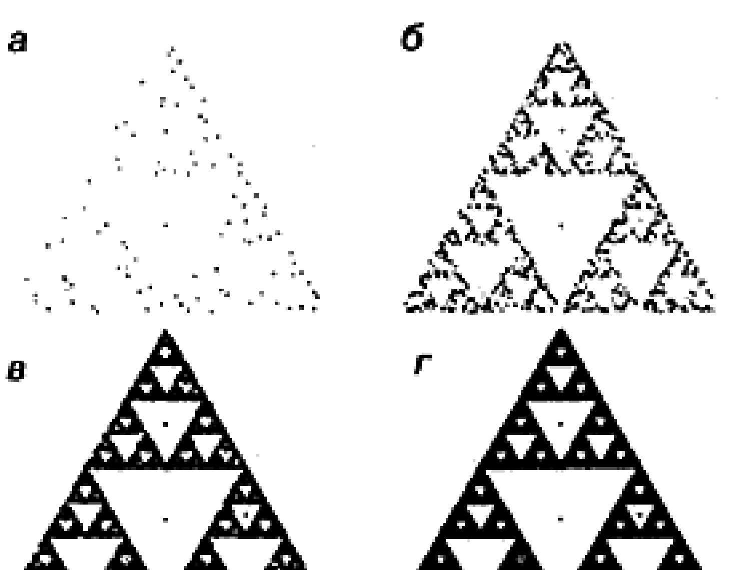

Рис. 5

Салфетка Серпинского — что это такое

Определяется салфетка Серпинского T_C при помощи следующей бесконечной процедуры. Возьмем треугольник $A_0A_1A_2$, состоящий из всех его внутренних и граничных точек (рис. 6,*а*), и на *первом этапе* разделим его тремя средними линиями на четыре треугольника, о которых будем говорить, что это треугольники *ранга 1*. Удалим внутренность *центрального* треугольника ранга 1 (рис. 6,*б*). Остаются три треугольника, каждый — вместе с его границей. Они попарно пересекаются между собой, всякий раз по вершине. Обозначим эти треугольники (напомним, ранга 1) через T_0^1, T_1^1 и T_2^1. Верхний индекс означает номер этапа построения, нижний — номер вершины, к которой данный треугольник прилегает.

На *втором этапе* возьмем каждый треугольник T_i^1 ранга 1 и разделим его средними линиями на четыре треугольника, которые назовем *треугольниками ранга 2*. Внутренность центрального треугольника опять выбрасывается, а оставшиеся три замкнутых треугольника обозначаются через T_{ij}^2. Первый нижний индекс i наследуется от треугольника ранга 1, в котором находится данный треугольник ранга 2. Второй индекс j означает, какой из трех треугольников ранга 2, на которые подразбивается i-й треугольник T_i^1 ранга 1, имеется в виду. Числа i и j могут принимать значения 0, 1 или 2. Заметим, что если остающихся треугольников ранга 1 было 3, то остающихся треугольников ранга 2 — уже 9 (рис.6,*в*).

На следующем, *третьем*, этапе берется T_{ij}^2 ранга 2, делится на четыре треугольника, которые объявляются треугольниками ранга 3. Как и прежде, внутренность центрального выбрасывается и оставшиеся три треугольника обозначаются через T_{ijk}^3, где индекс k равен 0,1 или 2 (рис.6,*г*).

Салфетка Серпинского T_C — это множество тех точек исходного треугольника $A_0A_1A_2$, которые не принад-

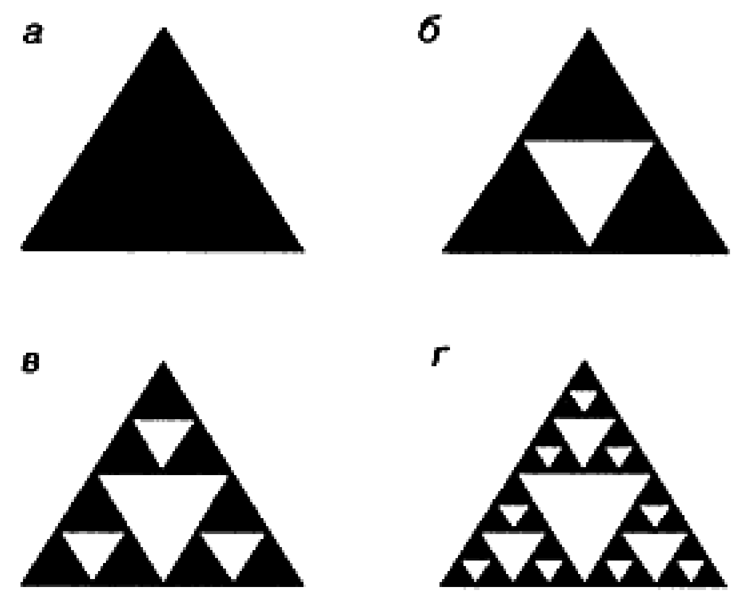

Рис. 6

[1] *В математике хорошо известна конструкция под названием* ковер Серпинского. *Салфетка и ковер Серпинского определяются совершенно аналогично, разница только в том, что салфетка строится на основе треугольника, а ковер — на основе квадрата.*