Потенциал электростатического поля

В.МОЖАЕВ

Для описания электростатического поля наряду с его силовой характеристикой — напряженностью электрического поля $\vec{E}$ — вводят энергетическую характеристику — потенциал поля φ. В отличие от напряженности, электростатический потенциал является скалярной величиной и равен отношению потенциальной энергии взаимодействия пробного точечного заряда с полем к величине этого заряда. Потенциальная энергия заряда, помещенного в электростатическое поле, численно равна работе, которую необходимо совершить, чтобы переместить этот заряд от выбранного нулевого уровня потенциальной энергии в данную точку пространства. Значение потенциальной энергии, а следовательно и потенциала, в данной точке зависит от выбора нулевого уровня отсчета. Физический смысл имеет не сам потенциал в точке, а его изменение в пространстве (разность потенциалов), которое не зависит от выбора нулевого уровня отсчета потенциала.

На практике электростатическое поле можно характеризовать только одной функцией — электростатическим потенциалом, поскольку напряженность электростатического поля однозначно связана с потенциалом. В случае сферически симметричного электрического поля, когда напряженность электрического поля зависит только от расстояния r, эта связь имеет вид

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr},$$

где производная $\frac{d\varphi}{dr}$ (возможно, для читателя более привычно обозначение $\varphi'(r)$) выражает быстроту приращения потенциала в данном направлении. Аналогичные соотношения можно записать для проекций вектора напряженности в декартовой системе координат:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx},\ E_y = -\frac{d\varphi}{dy},\ E_z = -\frac{d\varphi}{dz}$$

(или, в иных обозначениях, $E_x = -\varphi'(x)$, $E_y = -\varphi'(y)$, $E_z = -\varphi'(z)$; при дифференцировании по одной координате две остальные в выражении $\varphi(x, y, z)$ надо считать постоянными).

Теперь перейдем к разбору конкретных примеров расчета потенциала электростатического поля с известным распределением напряженности поля и наоборот — расчета $\vec{E}$ по известному распределению φ.

Задача 1. *Найдите распределение потенциала между пластинами уединенного заряженного плоского конденсатора. Заряд на пластинах площадью S равен Q, а расстояние между пластинами d. Краевыми эффектами пренебречь. За нулевой уровень отсчета принять бесконечность.*

Для расчета потенциала выберем систему координат, изображенную на рисунке 1, с началом координат в центре

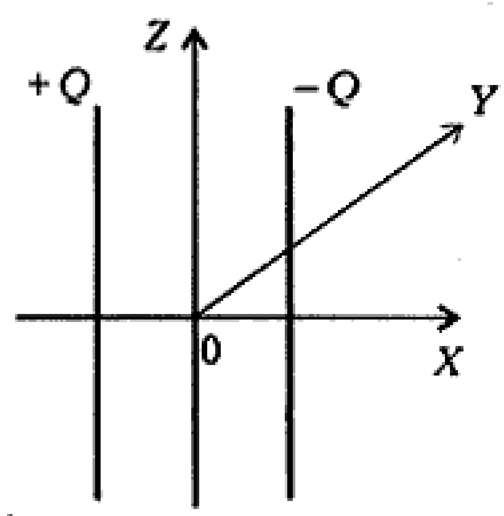

Рис. 1

конденсатора. В области $-d/2 \le x \le d/2$ электростатическое поле однородно и вектор $\vec{E}$ направлен вдоль оси X, поэтому

$$E_x = \frac{Q}{\varepsilon_0 S},\ E_y = 0,\ E_z = 0.$$

Используя связь между приращением потенциала и напряженностью электрического поля, можно записать

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

Решение того уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = -\frac{Qx}{\varepsilon_0 S} + C_1,$$

где C_1 — некоторая константа. Для ее нахождения воспользуемся тем, что плоскость $x = 0$ является эквипотенциальной поверхностью с потенциалом $\varphi = 0$. Действительно, силовые линии электрического поля плоского конденсатора в любой точке, включая и бесконечно удаленные точки, перпендикулярны плоскости $x = 0$. Поэтому при перемещении пробного заряда вдоль этой плоскости работа не совершается и потенциал всех точек этой плоскости $\varphi = 0$. Из условия, что при $x = 0$ $\varphi = 0$ следует, что $C_1 = 0$, следовательно,

$$\varphi(x) = -\frac{Qx}{\varepsilon_0 S}.$$

Поскольку $E_y = E_z = 0$, распределение потенциала не зависит от y и z, и плоскости $x = \text{const}$ (при $-d/2 \le x \le d/2$) являются эквипотенциальными поверхностями с потенциалом, равным значению потенциала при данном значении x. Распределение потенциала между пластинами центральной части плоского конденсатора изображено на рисунке 2.

Следует отметить, что для пластин конечного размера (т.е. для реальных конденсаторов) все эквипотенциальные

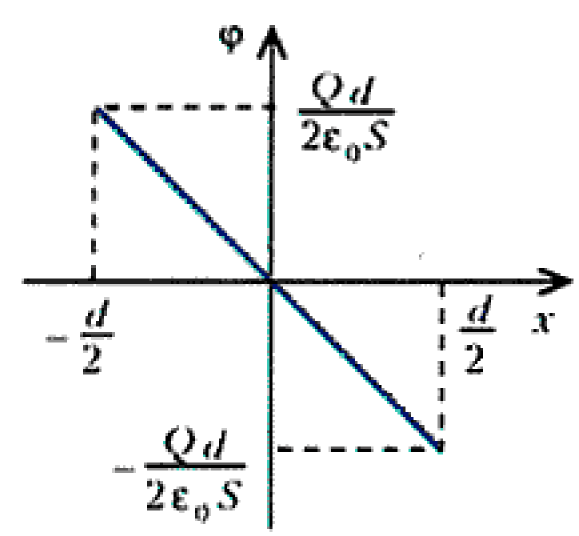

Рис. 2

поверхности $\varphi \ne 0$ принципиально отличаются от поверхности нулевого потенциала — эквипотенциальной поверхностью нулевого потенциала всегда является плоскость ($x = 0$), а эквипотенциальными поверхностями не нулевого потенциала являются сложные замкнутые поверхности, которые только вдали от краев пластин можно считать плоскостями ($x = \text{const}$).

(В качестве самостоятельного упражнения нарисуйте: 1) два аналогичных распределения при нулевом уровне потенциала на положительно заряженной пластине и на отрицательно заряженной; 2) качественное распределение $\varphi(x)$ для реального конденсатора вблизи края пластин; 3) качественное распределение $\varphi(x)$ вне пластин конденсатора.)

Задача 2. *Шар радиусом R равномерно заряжен с объемной плотностью заряда ρ. Вычислите распределение* *потенциала внутри и вне шара. За нулевой уровень отсчета потенциала принять бесконечность.*

Сначала рассмотрим область пространства вне шара: $R \le r \le \infty$, где r — расстояние от центра шара до выбранной точки пространства. В этой области заряженный шар создает точно такое же электрическое поле, как и точечный заряд, помещенный в центр шара.[1] Поэтому напряженность поля на расстоянии r от шара равна

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho\left(4\pi R^3/3\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

Приращение потенциала для данного случая можно записать так:

$$d\varphi = -E(r)dr,$$

где dr — малое изменение расстояния r. Просуммируем обе части данного уравнения:

$$\int d\varphi = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^2}.$$

После интегрирования получим

$$\varphi(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + C_1.$$

Для определения константы C_1 используем граничное условие: при $r \to \infty$ $\varphi \to 0$. Отсюда следует, что $C_1 = 0$, следовательно, распределение потенциала в области $R \le r \le \infty$ имеет вид

$$\varphi(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}.$$

Теперь рассмотрим область пространства внутри шара: $0 \le r \le R$. В этом случае напряженность электрического поля определяется только зарядом внутри шара радиусом r и равна

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Тогда

$$\int d\varphi = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r dr,\ \varphi(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C_2.$$

Для определения константы C_2 воспользуемся граничным условием: при $r = R$ $\varphi = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$ — это значение потенциала находится из полученного выше распределения. Отсюда получим, что $C_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$. Окончательное выражение для распределения потенциала в области $0 \le r \le R$ имеет вид

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R^2 - r^2\right).$$

График зависимости $\varphi(r)$ при $0 \le r \le \infty$ изображен на рисунке 3.

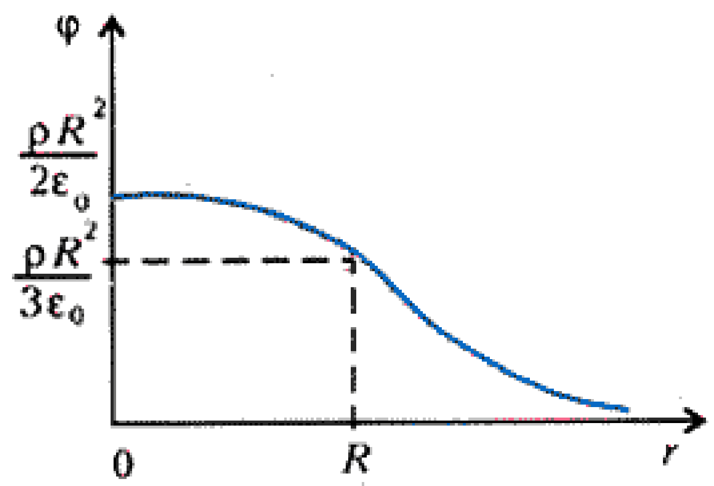

Рис. 3

Задача 3. *Из-за наличия объемного заряда в межэлектродном пространстве плоского вакуумного диода при нулевой разности потенциалов между катодом и анодом устанавливается распределение потенциала, показанное на рисунке 4. Найдите распределение напряженности электрического поля между катодом и анодом.*

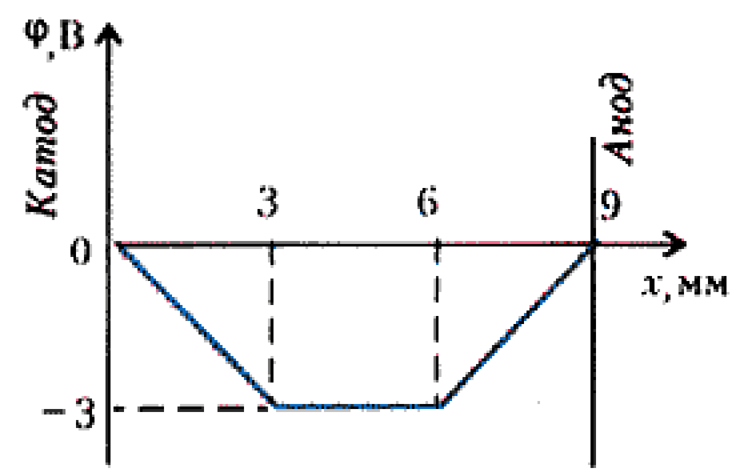

Рис. 4

Сначала запишем распределение потенциала $\varphi(x)$ в аналитическом виде (см. рис.4):

при $0 \le x \le 3\cdot10^{-3}$ $\varphi(x) = -10^3 x$,
при $3\cdot10^{-3} \le x \le 6\cdot10^{-3}$ $\varphi(x) = -3$,
при $6\cdot10^{-3} \le x \le 9\cdot10^{-3}$ $\varphi(x) = -9 + 10^3 x$.

В этих соотношениях потенциал выражен в вольтах, а координата x — в метрах.

Используя связь между напряженностью электрического поля E_x и потенциалом ($E_x = -d\varphi/dx$), получим

при $0 \le x \le 3\cdot10^{-3}$ $E(x) = 10^3$,
при $3\cdot10^{-3} \le x \le 6\cdot10^{-3}$ $E(x) = 0$,
при $6\cdot10^{-3} \le x \le 9\cdot10^{-3}$ $E(x) = -10^3$.

Здесь напряженность выражена в вольтах на метр.

Распределение $E(x)$ между катодом и анодом изображено на рисунке 5.

Реальное распределение потенциала в плоском диоде, конечно, не имеет изломов — это гладкая кривая параболического вида. И, естественно, распределение напряженности не имеет скачков (разрывов).

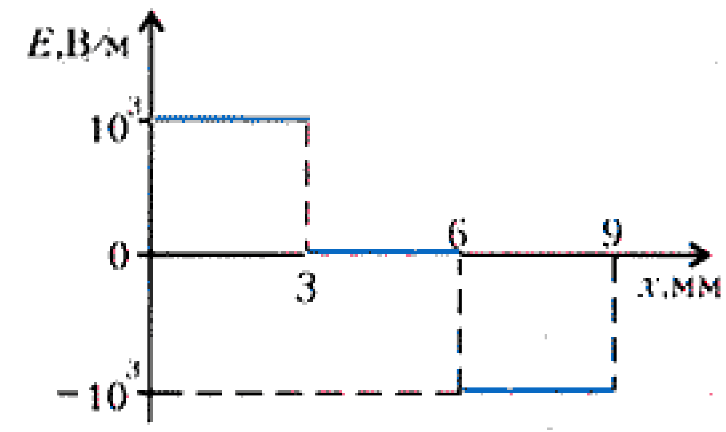

Рис. 5

(Кстати, а что означают скачки на полученной нами зависимости $E(x)$? Попробуйте нарисовать качественное распределение объемного заряда в межэлектродном пространстве диода.)

Задача 4. *Проводящий незаряженный шар радиусом R расположен в поле точечного заряда Q, находящегося на расстоянии L от центра шара. Определите потенциал шара. За нулевой уровень отсчета потенциала принять бесконечность.*

Проводящий шар существенным образом изменяет структуру электрического поля точечного заряда (особенно в окрестности шара). Свободные заряды шара (электроны проводимости) перераспределяются, и на поверхности шара возникает такое распределение поверхностных зарядов (рис.6), чтобы суммарное поле внутри шара (поле точечного заряда Q и поле поверхностных зарядов шара) было равно нулю. Именно условие отсутствия электростатического поля в изолированных проводниках лежит в основе явления электростатической индукции — наведения поверхностных зарядов на проводниках во внешнем электрическом поле. (Поскольку электрическое поле внутри шара равно нулю, можно удалить внутреннюю часть шара и оставить тонкую сферическую оболочку. Очевидно, что это никак не повлияет на пространственное распределение электрического поля и на распределение индуцированных зарядов по поверхности шара. Поэтому задачи о нахождении потенциала проводящего шара или сферы абсолютно эквивалентны.)

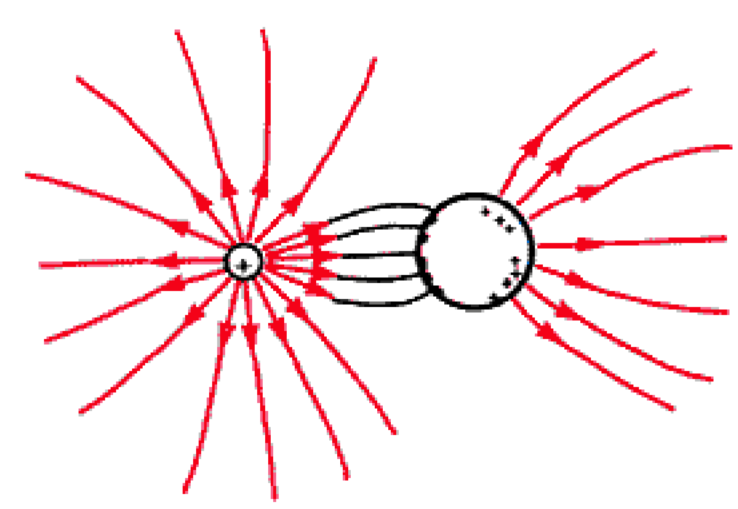

Рис. 6

[1] *Подробнее об электрическом поле заряженного шара можно прочитать, например, в статье Л.Асламазова «Напряженность, напряжение, потенциал» в «Приложении к журналу «Квант» №5/94. (Прим. ред.)*

Для решения задачи воспользуемся одним из фундаментальных свойств электростатического поля — принципом суперпозиции. В нашем случае электрическое поле во всем пространстве будет являться суперпозицией полей, создаваемых точечным зарядом и индуцированными поверхностными зарядами на шаре. Найдем сначала потенциал в центре шара φ_0, который определяется алгебраической суммой потенциалов поля точечного заряда Q и поля индуцированных зарядов с поверхностной плотностью $\sigma(r)$:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L} + \frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i \Delta S_i}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

где ΔS_i — малый элемент поверхности шара, а σ_i — плотность его заряда. В числителе второго слагаемого стоит суммарный поверхностный заряд шара, но шар не заряжен, поэтому это слагаемое равно нулю и, следовательно, потенциал в центре шара равен

$$\varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}.$$

Поскольку весь объем шара является эквипотенциальным, потенциал шара равен потенциалу его центра:

$$\varphi = \varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}.$$

Мы получили, на первый взгляд, неожиданный результат: потенциал шара в поле точечного заряда не зависит от радиуса шара. А на что же влияет размер шара? Оказывается, на величину и пространственное распределение электрического поля вне шара. Самое забавное заключается в том, что мы, не зная электрического поля снаружи шара, смогли найти его потенциал.

(Задача о нахождении распределения поля вне шара выходит за рамки школьной программы, но она имеет строгое решение. Для любознательных сообщим, что данное поле будет эквивалентно полю, создаваемому тремя точечными зарядами: исходным зарядом Q, зарядом величиной RQ/L, находящимся в центре шара, и зарядом, равным заряду в центре шара, но противоположным по знаку и расположенным на прямой, соединяющей центр шара с зарядом Q, на расстоянии $x = R^2/L$ от центра шара.[2] Предлагаем проверить самостоятельно, что для системы этих трех зарядов сферическая поверхность радиусом R является эквипотенциальной поверхностью с потенциалом $Q/(4\pi\varepsilon_0 L)$.)

[2] *Подробнее об этом можно прочитать, например, в статье А.Черноуцана «Метод электростатических изображений» в «Кванте» №1 за 1996 год. (Прим. ред.)*

Задача 5. *Металлический шар радиусом R_1, заряженный до потенциала φ_1, симметрично окружен тонкостенной проводящей незаряженной сферой*

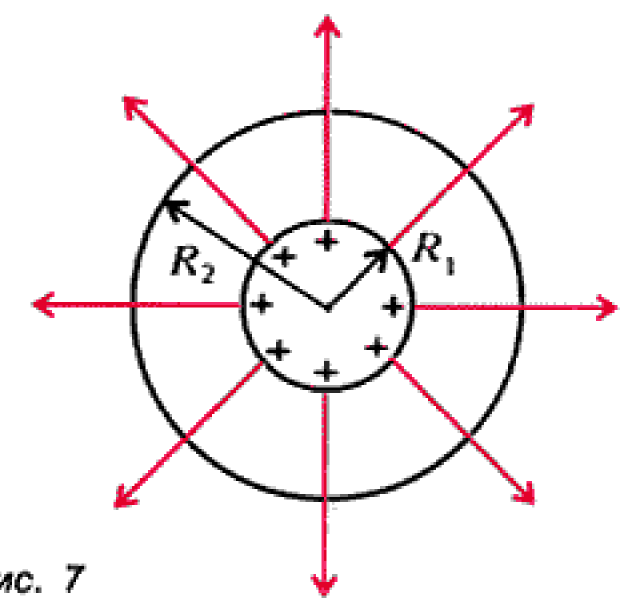

Рис. 7

радиусом R_2 (рис.7). Чему будет равен потенциал шара в двух случаях: 1) если заземлить сферу; 2) если закоротить шар и сферу (соединить проводником)?

Сначала поговорим немного о физической стороне процесса заземления. С технической точки зрения, заземлить некое проводящее тело означает соединить данное тело и Землю хорошим проводником. Обычно для этого в Землю закапывают достаточно большой металлический лист — чем больше поверхность соприкосновения металла и Земли, тем лучше. С физической точки зрения, заземлить означает выровнять потенциалы Земли и проводящего тела. Для справки: поверхностный заряд Земли отрицательный, напряженность электрического поля вблизи поверхности Земли составляет приблизительно 100 В/м, а потенциал Земли относительно бесконечности равен 400000 В. Возникает вопрос: а какой потенциал имеет незаряженный проводник (не заземленный) у поверхности Земли? Однозначно ответить на этот вопрос нельзя, все зависит от конкретной ситуации: наличия окружающих проводящих предметов, высоты от поверхности Земли, проводящих свойств окружающего воздуха и т.д. Но когда речь идет о задачах, подобной этой, считается, что потенциал незаряженного проводника равен потенциалу Земли. Поэтому, если на проводнике имеется заряд, то такой проводник приобретает дополнительный потенциал, вызванный собственным электрическим полем. При постоянном потенциале Земли значения дополнительного потенциала заряженного тела, отсчитанные от бесконечности или от поверхности Земли, совпадают, а потенциал Земли в этом случае можно считать равным нулю.

Теперь разберем первый случай нашей задачи, когда сфера заземлена, т.е. потенциал сферы стал равным нулю. Поскольку потенциал шара до заземления был равен φ_1, на шаре находился заряд $Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1\varphi_1$. Обозначим через Q_2 заряд, который перейдет с Земли на сферу после заземления, и запишем условие равенства нулю потенциала сферы:

$$\varphi_1\frac{R_1}{R_2} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = 0.$$

Отсюда

$$Q_2 = -4\pi\varepsilon_0 R_1\varphi_1 = -Q_1.$$

Это означает, что электрическое поле вне оболочки будет отсутствовать, а шар и сфера будут представлять из себя заряженный сферический конденсатор (рис.8). Потенциал шара, очевидно, будет равен

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \varphi_1 - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \varphi_1\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right).$$

Во втором случае, когда шар и оболочка закорочены, их потенциалы будут равны.

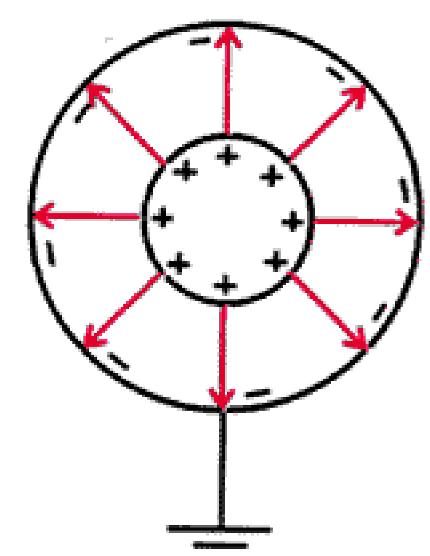

Рис. 8

Легко сообразить, что равенство потенциалов означает отсутствие электрического поля между шаром и сферой, следовательно, заряд шара равен нулю, а заряд сферы равен заряду шара. Покажем это. Пусть после соединения на сферу перейдет заряд Q_3, тогда на шаре останется заряд $Q_1 - Q_3$. Условие равенства потенциалов шара и сферы можно записать в виде

$$\frac{Q_1 - Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q_1 - Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Отсюда следует, что $(Q_1 - Q_2)(R_2 - R_1) = 0$. Поскольку $(R_2 - R_1) \neq 0$, получаем $Q_1 = Q_3$. Таким образом, потенциал

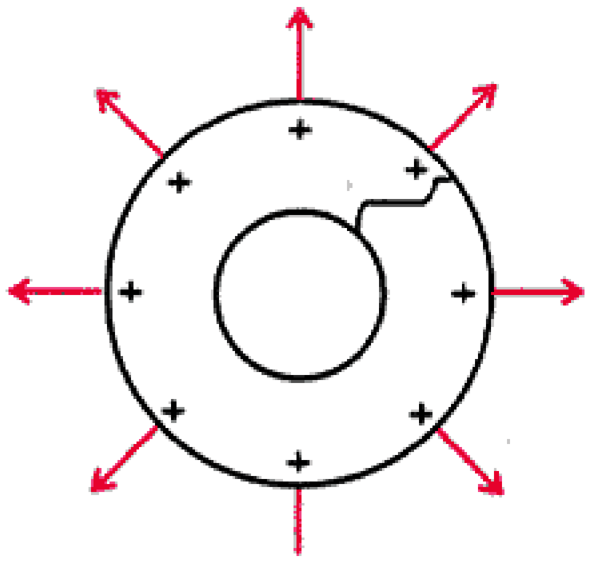

Рис. 9

шара

$$\varphi_3 = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \varphi_1 \frac{R_1}{R_2}.$$

Электрическое поле системы шар — сфера для данного случая изображено на рисунке 9.

Упражнения

1. Найдите распределение потенциала для проводящего заряженного шара радиусом R_1, окруженного толстостенной незаряженной проводящей сферой с радиусами R_2 (внутренний) и R_3 (внешний). Заряд шара Q. За нулевой уровень потенциала принять бесконечность.

2. Внутри плоского заряженного конденсатора, расстояние между пластинами которого d, на расстоянии a ($a < d/2$) от положительно заряженной пластины расположен точечный заряд q. Заряд конденсатора Q, а площадь пластин S. Какую работу необходимо совершить, чтобы переместить заряд q на бесконечность?

3. Распределение потенциала между электродами газоразрядной трубки при тлеющем разряде изображено на рисунке 10. Найдите распределение напряженности электрического поля между электродами.

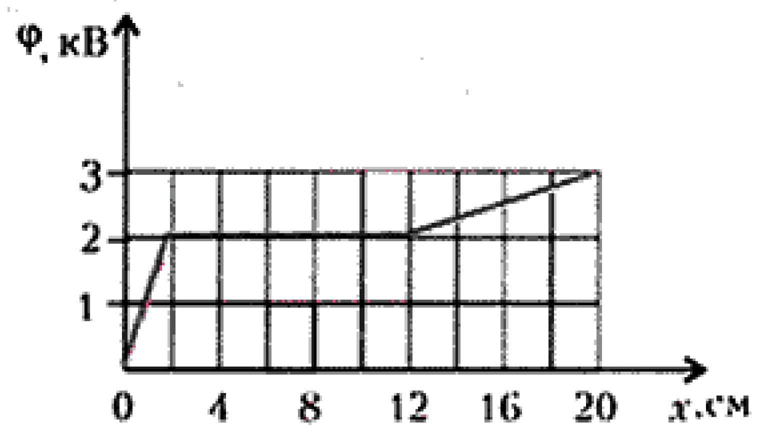

Рис. 10

4. Незаряженный проводящий шар радиусом R расположен в поле точечного заряда q (рис.11). Расстояние между зарядом и центром шара L. Шар через гальванометр G и ключ K соединен с Землей. Какой заряд протечет через гальванометр после замыкания ключа?

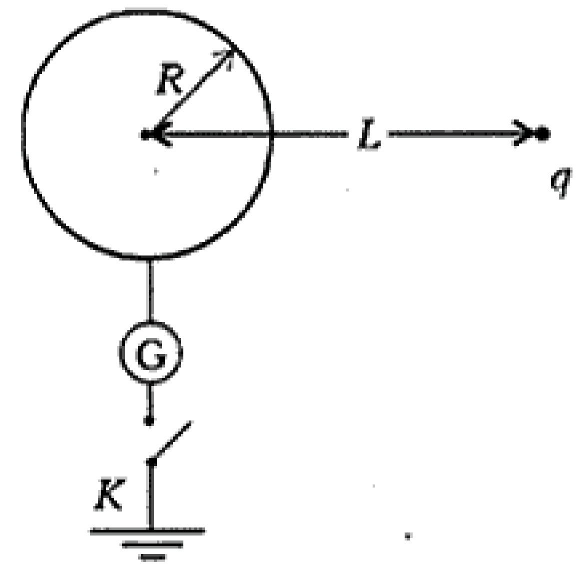

Рис. 11