Участок цепи с источником тока

А.ЧЕРНОУЦАН

ПОЖАЛУЙ, большинство школьников согласится, что основные законы постоянного тока достаточно просты. И законы Ома, и закон Джоуля – Ленца легко запомнить и несложно применять. Но, к сожалению, эта простота кончается при переходе к участку цепи, содержащему источники тока. Начнем с того, что закон Ома для такого участка — назовем его обобщенным законом Ома для участка цепи — в школе вообще не проходят, а он очень полезен как для решения задач, так и для более глубокого понимания теоретических вопросов. Как мы увидим, опираясь на обобщенный закон Ома, можно лучше разобраться в энергетических соотношениях для участка цепи с источником тока.

Обобщенный закон Ома

Обсудим сначала физический смысл закона Ома, относящегося к участку цепи, содержащему только идеальный резистор. Закон Ома утверждает, что для поддержания тока на участке к нему надо приложить постоянное напряжение, причем сила тока и напряжение пропорциональны друг другу: $U = IR$. Но это означает, что для поддержания направленного движения свободных зарядов на них должна действовать постоянная сила со стороны электрического поля $\vec{E}$. В случае участка цепи без источников это поле является электростатическим: $\vec{E} = \vec{E}_{эл}$, оно создается самими зарядами проводника. (В процессе установления тока заряды вдоль всей цепи за очень короткое время перераспределяются таким образом, чтобы создать нужное поле.) Переформулируем закон Ома следующим образом: если ток на участке цепи поддерживается полем $\vec{E}$, то *сила тока пропорциональна работе этого поля по переносу единичного заряда с одного конца участка на другой*. Напомним, что в случае электростатического поля эта работа равна разности потенциалов.

Обозначим один конец участка цифрой *1*, а другой цифрой *2* и запишем закон Ома в виде

$$U_{12} = I_{12}R, \qquad (1)$$

где $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$, $I_{12} = +I$, если ток течет от *1* к *2*, и $I_{12} = -I$ для тока, текущего навстречу движению, т.е. от *2* к *1*. Такая форма записи, позволяющая передвигаться по участку цепи в любом направлении, очень удобна.

Теперь предположим, что на этом же участке цепи действуют сторонние силы. Вспомним, что численной характеристикой сторонних сил является ЭДС (электродвижущая сила), которая определяется как *работа сторонних сил по переносу единичного заряда с одного конца участка цепи на другой*. Определим величину $\mathscr{E}_{12}$ как работу сторонних сил по переносу единичного заряда от *1* к *2*, т.е. $\mathscr{E}_{12} = +\mathscr{E}$, если сторонние силы направлены по движению (от *1* к *2*), и $\mathscr{E}_{12} = -\mathscr{E}$ в противоположном случае (рис.1).

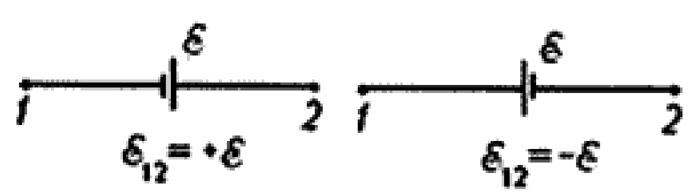

Рис. 1

Направленное движение зарядов на участке цепи теперь поддерживается как электростатическим полем $\vec{E}_{эл}$, так и полем сторонних сил $\vec{E}_{ст}$. Точнее, оно определяется суммарным полем $\vec{E} = \vec{E}_{эл} + \vec{E}_{ст}$, и поскольку заряды не могут «отличить» суммарное поле от чисто электростатического, то разумно предположить, что сила тока так же зависит от суммарного поля, как раньше (в отсутствие источников) она зависела от электростатического поля. А именно, *сила тока пропорциональна работе суммарного поля $\vec{E}$ по переносу единичного заряда с одного конца участка на другой*. Эта работа состоит из двух частей — из работы электростатического поля, равной разности потенциалов, и из работы сторонних сил, равной, по определению, ЭДС:

$$I_{12}R = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}, \qquad (2)$$

где R — сопротивление участка цепи, включая внутреннее сопротивление источника.

Еще раз сформулируем правила знаков. Если направление тока на рассматриваемом участке неизвестно, то его выбирают произвольным образом (если после расчетов получится $I < 0$, значит, действительное направление тока противоположно выбранному, но величина тока найдена правильно). При движении от точки *1* к точке *2* надо записать $I_{12} = I$, если мы идем по току, и $I_{12} = -I$, если против. Если мы идем по сторонним силам, то $\mathscr{E}_{12} = \mathscr{E}$, а если

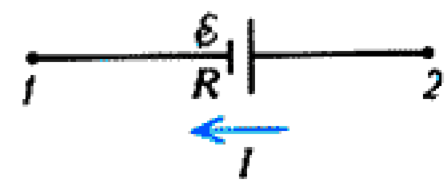

Рис. 2

против, то $\mathscr{E}_{12} = -\mathscr{E}$. Например, для рисунка 2 получаем

$$-IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}.$$

Разберем теперь несколько примеров на применение обобщенного закона Ома.

Вывод закона Ома для полной цепи. Рассмотрим замкнутую неразветвленную цепь. Начнем с простейшего случая, когда в цепи имеется только один источник тока (рис.3). Ток течет в

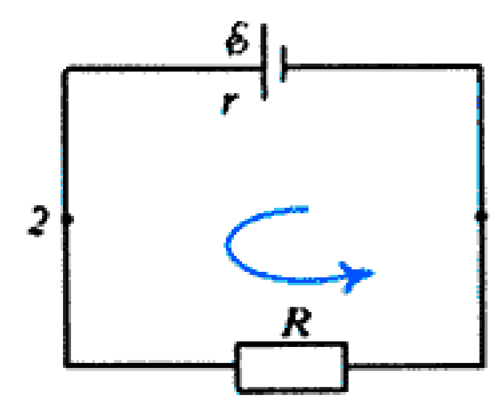

Рис. 3

направлении сторонних сил этого источника; пройдя контур в этом направлении, запишем обобщенный закон Ома для участка с источником и для участка с внешним сопротивлением:

$$Ir = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}, \quad IR = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$I(r + R) = \mathscr{E}.$$

Разности потенциалов сократились, потому что работа электростатических сил по замкнутому контуру равна нулю. В случае многих источников направление тока заранее неизвестно; выбираем его произвольно и проходим контур в этом направлении. Записав соответствующие уравнения, получим

$$I\sum R_i = \sum \pm\mathscr{E}_i$$

(разности потенциалов опять сократятся, поскольку потенциал каждой точки встретится дважды, но с разными знаками). Если сила тока окажется отрицательной, то направление тока надо изменить на противоположное.

Правила Кирхгофа. Перейдем теперь к рассмотрению разветвленной цепи. В качестве конкретного примера применения общих правил будем использовать цепь на рисунке 4. Задача — найти токи на всех участках цепи.

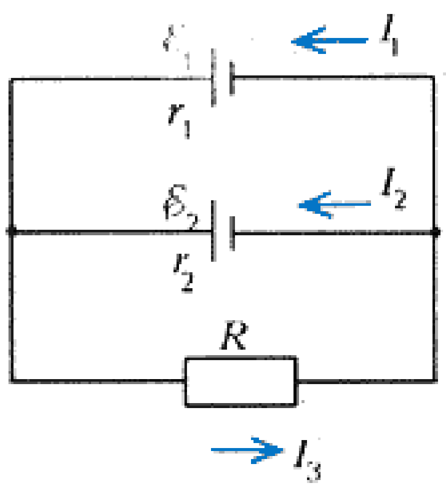

Рис. 4

В любом случае начинают с того, что произвольным образом выбирают направления неизвестных токов. Так как при протекании токов через любой узел на нем не должен накапливаться заряд, алгебраическая сумма входящих в этот узел токов и токов, выходящих из узла, должна быть равна нулю. (Принято входящие токи брать со знаком плюс, а выходящие — со знаком минус.) Это — *первое правило Кирхгофа*, или *правило узлов*. Его можно записать для каждого из $n-1$ узлов. Для получения оставшихся уравнений поступают так: выбирают произвольный замкнутый контур и обходят его в произвольном направлении. Если записать на каждом участке обобщенный закон Ома, а потом сложить полученные уравнения, то разности потенциалов сократятся, и мы придем к уравнению

$$\sum \pm I_i R_i = \sum \pm\mathscr{E}_i,$$

где правила знаков соответствуют описанным раньше. Это — *второе правило Кирхгофа*. Для схемы на рисунке 4 получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ I_1 r_1 + I_3 R = \mathscr{E}_1, \\ I_1 r_1 - I_2 r_2 = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 \end{cases}$$

(направление обхода контуров — против часовой стрелки).

Метод узловых потенциалов. Если в методе Кирхгофа неизвестными в уравнениях являются токи, то в данном методе составляются уравнения для потенциалов узлов. При этом один из потенциалов принимают равным нулю (потенциал определен с точностью до константы), так что число уравнений получается на одно меньше, чем число узлов. С помощью обобщенного закона Ома выражают каждый из проходящих узел токов, после чего записывают правило узлов — алгебраическая сумма входящих и выходящих токов равна нулю.

Для схемы на рисунке 4 примем потенциал левого узла равным нулю, а потенциал правого обозначим через φ; тогда получим *одно* уравнение

$$\frac{(\varphi-0)+\mathscr{E}_1}{r_1} + \frac{(\varphi-0)+\mathscr{E}_2}{r_2} - \frac{0-\varphi}{R} = 0$$

(сумма токов, входящих в левый узел и выходящих из него, равна нулю). Найдя потенциалы всех узлов, с помощью обобщенного закона Ома вычисляем токи (заметим, что выражения для токов нами были уже записаны при составлении уравнения).

Батарея источников тока. Несколько соединенных между собой источников, подключенных к внешней цепи, удобно заменить одним эквивалентным источником. В школьном курсе приводится ответ для параллельного и последовательного соединения *одинаковых* источников. Для последовательного соединения ответ легко обобщается на случай разных источников. Для случая параллельного соединения разных источников поступим следующим образом.

Запишем обобщенный закон Ома для каждого источника:

$$I_k r_k = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathscr{E}_k$$

(разности потенциалов на всех источниках одинаковы), разделим на r_k и сложим все уравнения:

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2)\sum\left(\frac{1}{r_k}\right) + \sum\left(\pm\frac{\mathscr{E}_k}{r_k}\right)$$

(ток через батарею равен сумме токов). Если разделить на $\sum\left(\frac{1}{r_k}\right)$, то уравнение приобретает вид закона Ома для участка цепи с эквивалентным сопротивлением, вычисляемым по формуле для параллельного соединения сопротивлений:

$$\frac{1}{r} = \sum\left(\frac{1}{r_k}\right),$$

и с эквивалентой ЭДС:

$$\mathscr{E} = \frac{\sum\left(\pm\frac{\mathscr{E}_k}{r_k}\right)}{\sum\left(\frac{1}{r_k}\right)}.$$

В случае N одинаковых источников ($\mathscr{E}_0, r_0$) получаем обычный ответ: $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0$, $r = r_0/N$. Для примера на рисунке 4 можно два источника заменить одним эквивалентным, после чего легко найти ток I_3. (Сделайте это сами и убедитесь, что ответ получается такой же, как с помощью двух других методов.)

Энергетический баланс на участке цепи

Если на участке цепи действуют сторонние силы, то следует говорить о трех членах в энергетическом балансе:

1) Чтобы найти количество выделившегося тепла, надо вычислить работу суммарного поля над зарядами цепи. Как утверждает обобщенный закон Ома, работа суммарного поля над единичным зарядом равна $I_{12}R$; значит, за время t суммарное поле совершит работу

$$Q = I_{12}Rq = I_{12}R(I_{12}t) = I_{12}^2 Rt$$

(закон Джоуля–Ленца). Эта величина всегда положительна.

2) Работу сторонних сил над зарядами нужно трактовать как поступление энергии от неэлектростатических источников энергии. Она равна

$$A_{ст} = \mathscr{E}_{12}q = \mathscr{E}_{12}I_{12}t.$$

Эта величина может быть как положительной, так и отрицательной.

3) Работа электростатических сил над зарядами равна

$$A_{эл} = (\varphi_1 - \varphi_2)q = U_{12}I_{12}t.$$

Чтобы понять энергетический смысл этого выражения, заметим, что, в соответствии с обобщенным законом Ома,

$$I_{12}Rq = (\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12})q,$$

или

$$Q = A_{эл} + A_{ст}.$$

Значит, исходя из закона сохранения энергии, можно утверждать, что *работа электростатических сил на участке цепи равна энергии, поступившей в данный участок из оставшейся части цепи* (т.е. *из внешней цепи*). Если эта работа отрицательна, то во внешней цепи работа электростатических сил положительна, т.е. UI имеет смысл энергии, переданной во внешнюю цепь. Таким образом, электростатические силы регулируют обмен энергией между частями цепи.

Обсудим два примера.

КПД источника тока. Для вычисления коэффициента полезного действия надо разобраться, какая величина в данном конкретном случае играет роль полной (затраченной) работы, а какая

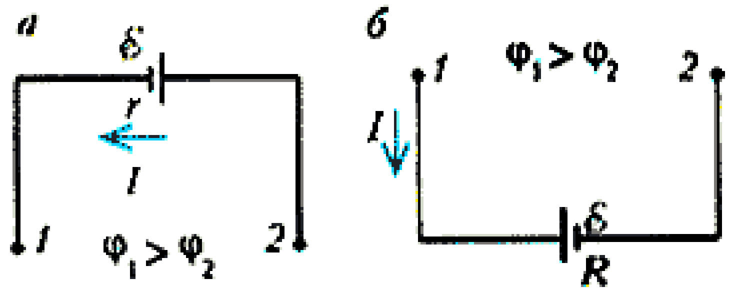

Рис. 5

— полезной работы. Рассмотрим ситуацию, когда источник тока является источником энергии для внешней цепи (содержащей, например, идеальный резистор, на котором только выделяется тепло). В этом случае (рис.5,*а*) сторонние силы источника совершают положительную работу $A_{ст} = \mathscr{E}It$, имеющую смысл полной (затраченной) работы, часть энергии $Q = I^2rt$ теряется в источнике в виде тепла, а часть $A_{полезн} = \left(\mathscr{E}I - I^2r\right)t = UIt$ передается во внешнюю цепь. Электростатические силы в самом источнике совершают отрицательную работу, а во внешней цепи — положительную.

КПД электромотора. Рассмотрим теперь случай, когда участок цепи получает энергию из внешней цепи, и эта энергия не преобразуется целиком в тепло, а частично идет на совершение работы. Это возможно только тогда, когда на участке есть сторонние силы (на идеальном резисторе вся энергия переходит в тепло). Эти сторонние силы действуют против тока, совершая отрицательную работу (рис.5,*б*), а работа против сторонних сил — положительная.

Например, при работе электромотора в обмотках вращающегося якоря возникает ЭДС электромагнитной индукции $\mathscr{E}$. В этом случае положительная работа электростатических сил $A_{эл} = UIt$ имеет смысл полной (затраченной) работы, часть энергии $Q = I^2Rt$ теряется в виде тепла, а часть $A_{полезн} = \left(UI - I^2R\right)t = \mathscr{E}It$ представляет из себя полезную работу — механическую работу электромотора.

Аналогичные соотношения можно записать и во многих других случаях (например, при зарядке аккумулятора).