VI МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

1. Полученное число больше. *Указание.* Поскольку $\frac{1}{14} = 0{,}0(714285)$, а длина периода дроби равна 6, на 1996 месте после запятой стоит цифра 4, а после ее вычеркивания на ее месте оказывается цифра 2.

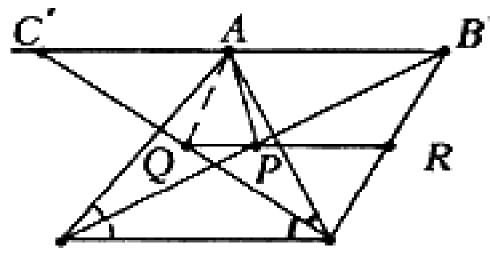

Рис. 19

2. $\frac{b+c-a}{2}$. *Решение.* Проведем через вершину A прямую l, параллельную BC, и продолжим биссектрисы до пересечения с прямой l в точках B' и C' (рис.19). Треугольники BAB' и CAC' — равнобедренные, а точки P и Q — середины отрезков BB' и CC'. Поэтому прямая PQ параллельна BC, отрезок QR — средняя линия в треугольнике $C'CB'$, PR — средняя линия в треугольнике $BB'C$. Отсюда

$$QR = \frac{b+c}{2};\ PR = \frac{a}{2};\ PQ = = \frac{b+c-a}{2}.$$

3. 60 и 95. *Указание.* Пусть a и b — искомые двузначные числа, а разность между суммой всех двузначных чисел и $a + b$ в 50 раз больше, чем a, т.е. $4905 - (a + b) = 50a$. Возможны три случая ($a + b < 200$): $a + b = 55$; $a + b = 105$; $a + b = 155$. В первых двух случаях одно из чисел a или b не будет двузначным.

4. а) Может; б) n — нечетно. *Решение.* Из условия следует, что одна из девочек знакома со всеми мальчиками, одна — с $(n - 1)$ мальчиком, ..., одна — с одним мальчиком и одна не знакома ни с одним из мальчиков. Общее число знакомств девочек равно $0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Если каждый из мальчиков знаком с k девочками, то общее количество знакомств мальчиков равно kn. Так как количество знакомств мальчиков равно количеству знакомств девочек, то $\frac{n(n+1)}{2} = kn$, откуда $k = \frac{n+1}{2}$. Так как k — целое число, то n — нечетно. Докажем, что при любом нечетном n нужная система знакомств существует. Пусть в компании $n = 2k - 1$ мальчиков, $2k$ девочек и ни один мальчик не знаком ни с одной девочкой. Разобьем всех девочек (их — четное число) на пары и занумеруем эти пары числами от 1 до k. Первую девочку из первой пары знакомим со всеми мальчиками, а вторую не знакомим ни с одним из мальчиков. Первую девочку из второй пары знакомим с $2k - 2$ мальчиками, вторую — с одним оставшимся мальчиком. Вообще, первую девочку из пары с номером l знакомим с $n - l + 1$ мальчиками, а другую — с $l - 1$ оставшимися мальчиками. В результате все девочки окажутся знакомыми с разным количеством мальчиков, а каждый из мальчиков знаком с k девочками.

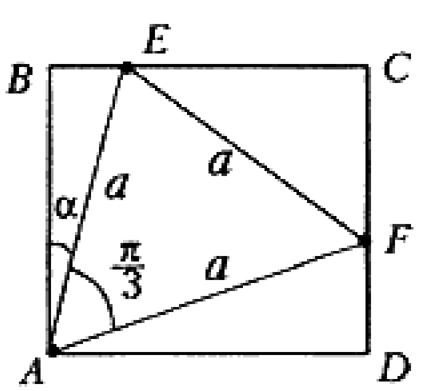

Рис. 20

5. $S_1 + S_2$. *Решение.* Пусть $\angle BAE = \alpha$, $AE = EF = FA = a$ (рис.20). Тогда $\angle FAD = \frac{\pi}{6} - \alpha$, $\angle CFE = \frac{\pi}{3} - \alpha$. Выразим площади S_1, S_2 и искомую площадь S через α и a:

$$S_1 = S_{ABE} = \frac{1}{2}a^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}a^2 \sin 2\alpha,$$

$$S_2 = S_{AFD} = \frac{1}{4}a^2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right),$$

$$S = S_{ECF} = \frac{1}{4}a^2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\alpha\right).$$

Осталось заметить, что

$$\sin 2\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\alpha\right).$$

6. -1 или 1. *Указание.* Перемножив равенства

$$x - y = \frac{y-z}{yz},\ y - z = \frac{z-x}{xz},\ x - z = \frac{y-x}{xy},$$

получим

$$(x-y)(y-z)(x-z) = \frac{(y-z)(z-x)(y-z)}{x^2y^2z^2}.$$

Так как $x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$, то $x^2y^2z^2 = 1$.
Итак, либо $xyz = 1$, либо $xyz = -1$.

7. $3 \le n \le 12$. Поскольку всякий угол многоугольника, удовлетворяющего условию задачи, равен либо 30°, либо 90°, либо 120°, а сумма всех внешних углов равна 360°, число n вершин многоугольника не больше чем $\frac{360°}{30°} = 12$.

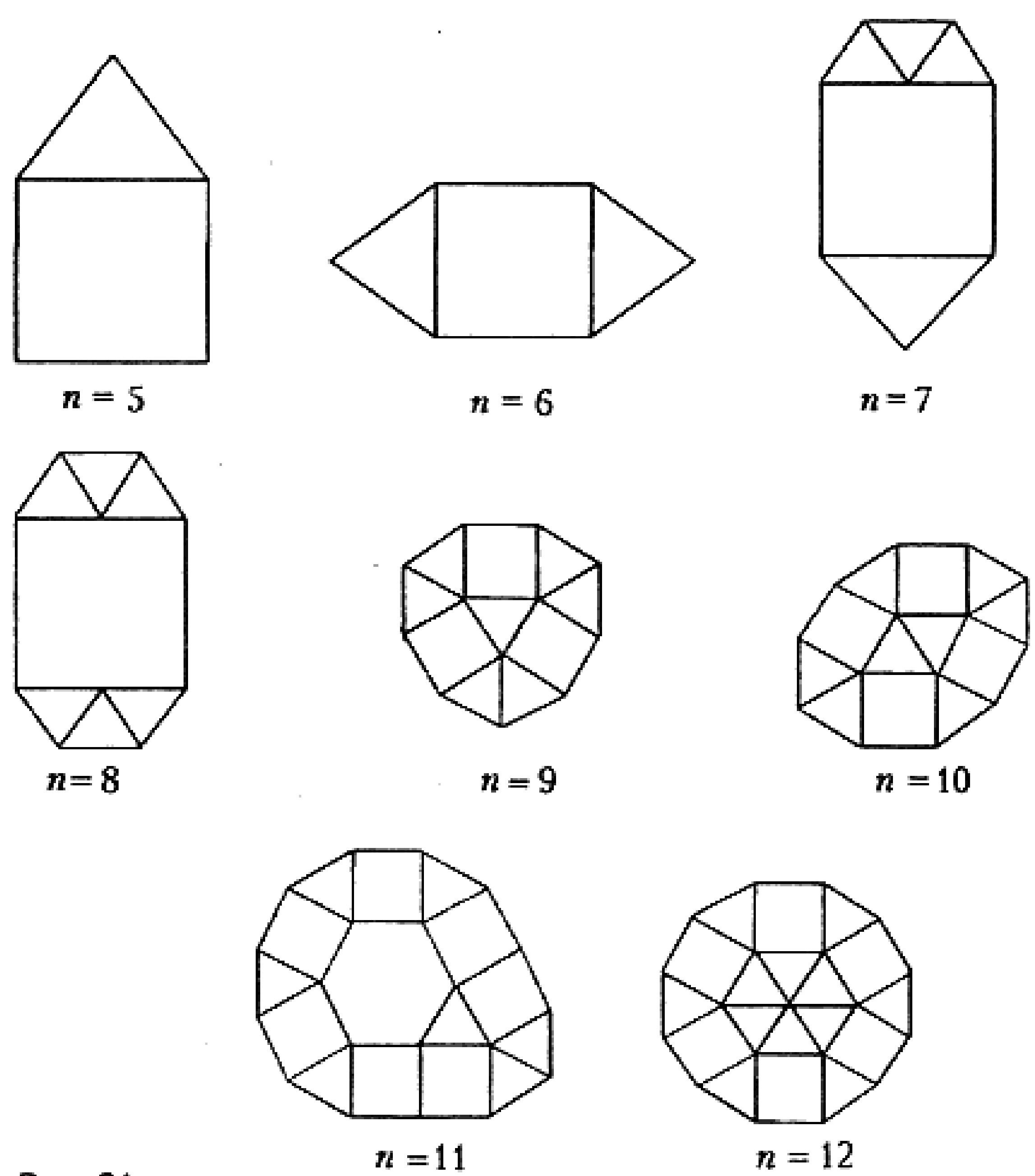

Рис. 21

На рисунке 21 показаны примеры многоугольников с числом сторон от 5 до 12, удовлетворяющих условию.

ФИЗИКА

1. а) $\alpha = \arccos(v_л/v_р)$; б) $\alpha = \arccos(2v_л/v_р)$.

2. $L = Mv_0^2/(2\mu(m+M)g)$. *Указание.* Чтобы получить дополнительное давление, оказываемое шариком на плиту, необходимо усреднить давление при столкновениях за все время движения плиты.