МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 3 при $x > 0$, $x \ne 4$. **2.** При $a \in \left\{\frac{1}{16}; \frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right\}$. **3.** $-\frac{7}{6}$.
4. $\left\{-\frac{9\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}\right\}$. **5.** $\pi b(a+b)$.

Вариант 2

1. а) $f(x) = x$ при $x \ne 1$; б) если $a \in (-\infty, 2) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$, то $x_1 = -\frac{1}{a+1}$, $x_2 = \frac{3}{1-a}$; если $a \in (-1, 0) \cup (0, 1) \cup \{4\}$, то $x = -\frac{1}{a+1}$; если $a \in (-2, -1] \cup \{0\}$, то уравнение решений не имеет.
2. $\{25\}$. **3.** 813. **4.** $\left\{-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right\}$. **5.** $\frac{540}{28+\sqrt{109}}$.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.А.И.ГЕРЦЕНА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. а) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, если $n = 1, 2$;
$\left(-\infty; -n-\sqrt{n^2-4}\right] \cup \left[-n+\sqrt{n^2-4}; 2\right) \cup (2; +\infty)$, если $n \ge 3$,
б) $f_2(x) = |x+2|$, $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ (рис.17),
в) $\left(-3-\sqrt{5}; 0\right)$ и $\left(-3+\sqrt{5}; 0\right)$.
2. $x \in (-1/2; 0) \cup (0; 1/2)$. **3.** $x_1 = -2/3$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 4/3$.
4. 120. **5.** $V = d/24 \cdot \sqrt{256q^2 - c^2d^2}$.

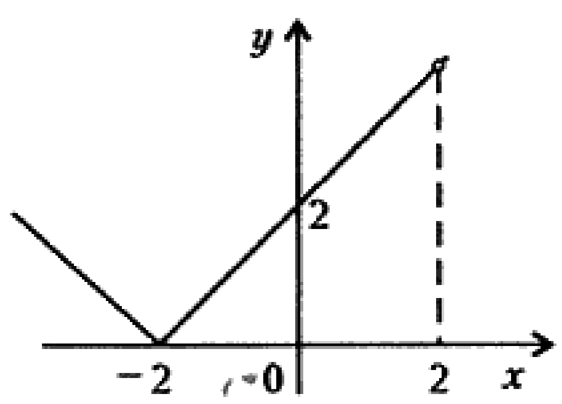

Рис. 17

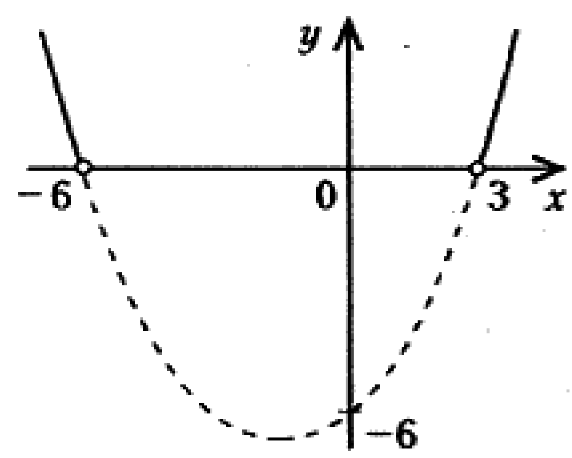

Рис. 18

Вариант 2

1. а) $(-\infty; -2n] \cup [n; +\infty)$;
б) $g(x) = 1/3\left(x^2+3x-18\right)$, $x \in (-\infty; -6) \cup (3; +\infty)$ (рис.18);
в) графики функций не пересекаются.
2. $x \in \left(-1; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; 2\right)$. **3.** $x_1 = -\frac{2\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{3}$.
4. 72. **5.** $V = \frac{a^3}{6} \sin\frac{\alpha}{2} \sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}$.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.** $\left(1 \pm \sqrt{2}; 1 \mp \sqrt{2}\right)$; $\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
3. $[-5; -3) \cup (-1; 1]$. **4.** $\frac{40R}{9}$.
5. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \{1\}$. *Указание.* Возведя в квадрат обе части уравнения, получите уравнение, имеющее корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 6 - 4a$. Эти значения подставьте в первоначальное уравнение.

Вариант 2

1. 6. **2.** $(1; +\infty)$. **3.** $(-\infty; 1) \cup \left\{\frac{5}{4}\right\}$. **4.** $\sqrt{1+\frac{\pi}{2}} - 1$.
5. $\pm\arccos\frac{5}{6}$. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой синусов и формулами, выражающими площадь треугольника через длины его сторон и радиусы вписанной и описанной окружностей.

Вариант 3

1. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **2.** $\left[\log_2 \frac{2\sqrt{2}+1}{2}; 1\right)$.
3. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Покажите, что сумма кубов корней уравнения равна $\sin 3\alpha = -1$. Оставьте лишь те α, для которых дискриминант данного уравнения положителен.
4. $r = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$; $2+\sqrt{2}$. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой Пифагора для получения соотношения между радиусами окружностей. Исследуйте полученную функцию на минимум с помощью производной.
5. $\left(-\infty; \frac{a+5}{a+4}\right)$, если $a < -4$; $\left(\frac{2a+1}{a-3}; +\infty\right)$, если $a > 3$; нет решений, если $-4 \le a \le 3$. *Указание.* Рассмотрите 3 промежутка значений a, данных в ответе.

Вариант 4

1. $(1; 0)$, $(-1; -1)$, $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$.
2. $\left(-3-\sqrt{10}; -6\right) \cup \left(0; \sqrt{10}-3\right) \cup \left\{-3 \pm \sqrt{13}\right\}$.
3. $5+2\sqrt{6}$. *Указание.* Пусть $n = x + \frac{1}{x}$. Задача эквивалентна отысканию наибольшего числа n, для которого $\frac{1}{2}\left(n+\sqrt{n^2-4}\right) \le 10$.
4. $\left(-\infty; 2-2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}-2; +\infty\right)$. *Указание.* Искомое множество является множеством значений функции $t - \frac{6-2\sqrt{2}}{t}$, $0 < |t| \le \sqrt{2}$, где $t = \cos x - \sin x$.
5. $AD = DB$. *Указание.* Пусть E — точка пересечения l со стороной AC. Воспользуйтесь подобием треугольников ΔBDH, ΔHEC, ΔBHC.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ ПРИ «КУРЧАТОВСКОМ ИНСТИТУТЕ»

МАТЕМАТИКА

1. $x = -\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
2. $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (1; 5)$. **3.** $x = 2/5$, $y = 3$, $z = 0$.
4. $\frac{d \pm \sqrt{d^2-c^2}}{2}$. **5.** $S = -\frac{a^2\cos 2\varphi}{\sin\varphi}$, $\pi/2 < \varphi < \pi$.
6. $x_0 = -3/7$, $S_{\min} = \frac{216}{49}\sqrt[4]{\frac{7}{9}}$.
7. $\left[a^a\right]$ при нецелом a; a^a и $a^a - 1$ при целом a.

ФИЗИКА

1. а) $\mu_{\min} = \frac{m\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha}$;
б) $v = \sqrt{2gh\frac{m/M}{1+M\left(1+(1+m/M)^2\operatorname{tg}^2\alpha\right)/m}}$.
2. а) $T = \frac{2T_1T_2}{T_1+T_2}$; б) $Q = \frac{5p_0V}{4}\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}$.
3. а) $-\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$; б) $-\mathcal{E}R/(R+2r)$, $\mathcal{E}$.
4. а) $\arccos\left(\cos\theta \cdot (1+bz/n_0)\right)$; б) $R = n_0/(b\cos\theta)$.