$$R_2 \le r \le R_3 \quad \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = \text{const},$$

$$R_1 \le r \le R_2 \quad \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right),$$

$$0 \le r \le R_1 \quad \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right) = \text{const}.$$

2. $A = \dfrac{qQ}{\varepsilon_0 S}\left(a - \dfrac{d}{2}\right)$.

3. В области

$0 \le x \le 2$(см) $E = -10^5$ В/м,

$2 \le x \le 12$ $E = 0$,

$12 \le x \le 20$ $E = -1{,}25 \cdot 10^4$ В/м.

4. От шара к Земле перетечет заряд $Q = qR/L$.

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. Вчера Роман купил 18 раков, сегодня — 16.

2. $\pm\dfrac{2\pi}{3} - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3} + 4k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. 3. $108\sqrt{15}/11$.

4. $\{1/3\} \cup \left[2^{-\sqrt{2}}; 2^{\sqrt{2}}\right]$, наименьшее решение $x = 1/3$.

5. $\arccos 1/4$.

Вариант 2

1. Прокл выменял 34 куска мыла.

2. $\dfrac{5\pi}{6} \pm \dfrac{\pi}{4} + 4k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. 3. $4\sqrt{5}$. 4. $[1; 5/2] \cup \{3\} \cup (4; 5]$.

5. $72/5$.

Вариант 3

1. Урожай волшебного дерева составил 184 монеты.

2. $\arccos\left(-\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\right) = \pi - \arcsin\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

3. $a_1 = 1/2$, $b_1 = -1$; $a_2 = 9/2$, $b_2 = -9$.

4. $\left(0; \left(3 - \sqrt{2}\right)/7\right] \cup \left[\left(3 + \sqrt{2}\right)/7; 5/7\right) \cup [36/49; 6/7)$. 5. $1 + 1/\sqrt{13}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $\Delta V = V_0(n-1)/(n+1)$.

2. Если пружина растянулась на x, то для неподвижного груза массой M должно выполняться условие $Mg = kx + N$, где N — сила реакции пола. Критическое условие отрыва: $N = 0$, тогда $kx = Mg$. Из закона сохранения энергии $kx^2/2 = mgx$ получаем $m = M/2$.

3. Когда пластины сложены вместе, поле внутри металла равно нулю, а внешнее поле наводит на наружных поверхностях пластин заряды $-q$ и $+q$. Получается, как около заряженной пластины в конденсаторе, где по одну сторону от нее поле 0, а по другую E. Тогда $E = \sigma/\varepsilon_0 = q/(\varepsilon_0 S)$, откуда заряды на поверхностях пластин равны $\pm\varepsilon_0 ES$.

После разведения заряды на пластинах сохранятся, и однородное поле, создаваемое зарядом одной пластины, будет равно $E/2$. Таким образом, на каждую заряженную пластину будут действовать два поля: внешнее поле E и противоположное по знаку поле притяжения другой пластины $-E/2$. Поэтому искомая сила, действующая на положительно заряженную пластину, направлена по внешнему полю и равна $F_+ = qE - qE/2 = \varepsilon_0 E^2 S/2$. На отрицательно заряженную пластину действует сила, направленная против внешнего поля и равная $F_- = -F_+ = -\varepsilon_0 E^2 S/2$. Т.е. пластины расталкиваются.

4. Энергия W порохового заряда при обычном выстреле расходуется на разгон пули массой m до скорости v на вылете. В условиях задачи эта энергия идет на работу против силы внешнего давления, которое должно обратить скорость пули на выходе в нуль, т.е. $W \sim mv^2/2 \sim p_{вн}Sl$. Отсюда $p_{вн} \sim mv^2/(2Sl)$. При $m = 10^{-2}$ кг, $v \sim 10^3$ м/с, $S \sim 10^{-4}$ м^2, $2l \sim 2$ м получаем $p_{вн} \sim 10^8$ Па $= 10^3$ атм.

5. При опрокидывании полупустой бутылки немного воды из нее выльется, увеличив тем самым объем запертого в бутылке воздуха. Это незначительное разрежение воздуха удержит воду от вытекания: $\Delta pS \sim \rho ghS$. Оценим изменение уровня воды в бутылке Δh, приводящее к ее удержанию:

$$\frac{\Delta p}{p} \sim \frac{\rho gh}{\rho g H_0} = \frac{10\text{ см}}{10\text{ м}} \sim \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta h}{10\text{ см}}.$$

Отсюда $\Delta h \sim 1$ мм.

Наличие воды в тарелке не дает пройти воздуху в процессе булькания в бутылку. Если же бутылку с водой просто перевернуть, то вода из нее выльется, пробулькивая.

Вариант 2

1. $\alpha = \theta/(n-1)$.

2. После того как все токи затухнут и все падения напряжения на сопротивлениях занулятся, потенциалы точек A, *1*, *2*, станут одинаковыми. Аналогично и для точек B, *3*, *4*. Получится эквивалентная схема четырех одинаковых параллельно подсоединенных к источнику конденсаторов емкостью C каждый. Соответственно, на одной пластине эквивалентного конденсатора емкостью $4C$ будет заряд $+Q = 4UC$, а на другой — заряд $-Q = -4UC$, т.е. через источник от точки A к точке B (или наоборот) перетечет заряд $\Delta Q = 4UC$.

3. Из кинематики для ускорений комочка (рис.12) и на основании второго закона Ньютона для равнодействующей получаем $F = m\sqrt{a^2 + \left(a - v^2/R\right)^2}$. Угол наклона вектора силы к горизонтали $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{a - v^2/R}$.

(Проверим: при $a = 0$ $F = mv^2/R$; при $a = 0$ и $v = 0$ $F = 0$.)

4. Из соотношений $A \sim Fl \sim 3/2\nu R\Delta T$ и $\nu = \dfrac{p_0 V_0}{RT_0}$ находим $\Delta T \sim \dfrac{2FT_0}{3p_0 S}$. При $F \sim 100$ Н, $p_0 \sim 10^5$ Па, $S \sim 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ м^2 получаем $\Delta T \sim 0{,}5T_0 \sim 150$ К, $T \sim 1{,}5T_0 \sim 450$ К.

5. Если жидкости в пробирке нет, только узкая часть пучка света достигнет экрана, остальные лучи уходят в стороны (рис.13), и на экране получается темный силуэт пробирки с небольшим просветом вдоль оси. Колечка практически не видно. Если же в пробирку налить ту же жидкость, что и в кювету, то при тонких стенках пробирки лучи идут к экрану, как будто ее нет. Поэтому на экране возникает лишь тень-силуэт колечка.

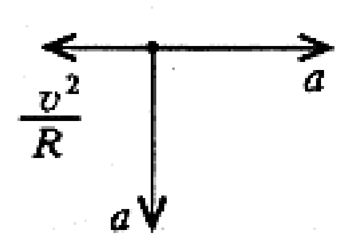

Рис. 12

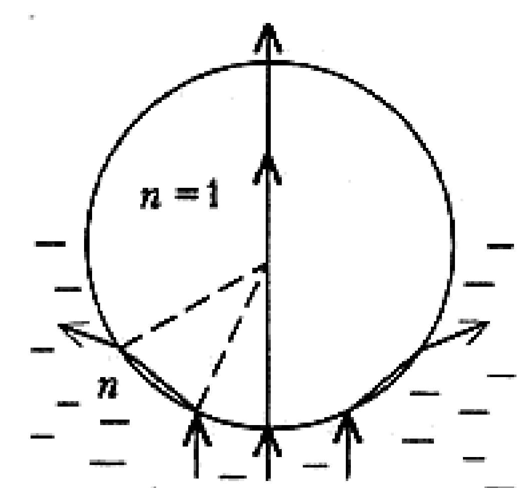

Рис. 13

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. См. рис.14.

2. $x = \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$. *Указание.* Избавьтесь от иррациональности в знаменателе левой части уравнений.

3. $x = \dfrac{(-1)^k}{2}\arcsin\dfrac{2}{3} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Перенесите $\operatorname{tg} x$ в левую часть.