«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. Наибольшая сумма будет для расположений, в которых первая цифра 1, последняя 0, а остальные цифры расположены в произвольном порядке. При каждом таком расположении сумма двузначных чисел будет равна 494. Наименьшая сумма будет в том случае, если первой цифрой будет 8, а последней 9. В этом случае сумма равна 397. Чтобы показать это, достаточно заметить, что все цифры, кроме первой и последней, участвуют по два раза: как число десятков и как число единиц.

2. Пьеро получил от Панталоне 20 подзатыльников. При решении следует отметить, что отбил руку не Артемон — тот мог отбить себе разве что лапу.

3. Число $n!$ не может оканчиваться ровно на 5 нулей. Для этого следует отметить, что каждый новый нуль получается при умножении этого числа на число, делящееся на 5. Первым будет число 5, вторым число 10, третьим 15, четвертым — 20, а пятым — число 25, но оно содержит два множителя 5, поэтому число 24! оканчивается на четыре нуля, а число 25! на шесть нулей. Следующие числа имеют уже не менее шести нулей на конце.

4. Одно из решений приведено на рисунке 1.

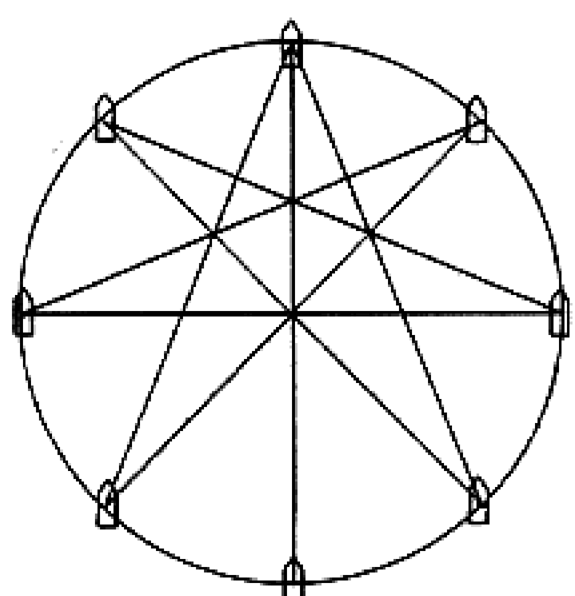

Рис. 1

5. Оба правы.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №6 за 1996 г.)

11. Докажем более сильный факт, а именно, что перестановкой цифры 7 в числе, состоящем из одной семерки и нескольких единиц (количеством не меньше двух), можно добиться, чтобы полученное число делилось на 7 или на 13, если оно не делится на 3.

Используем следующие разложения чисел на множители:

$$111111 = 3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37,$$

$$7111 = 13\cdot 547,$$

$$11711 = 7\cdot 1673,$$

$$11171111 = 7\cdot 1595873.$$

Пусть число единиц в записи нашего числа равно $n = 6k + p$. Если $p = 2$ или 5, то сумма цифр числа делится на 3, следовательно, и само число делится на 3.

Если $p = 0$, то число, составленное из одних единиц, делится на 7, следовательно, приписав впереди 7, вновь получим число, делящееся на 7.

Если $p = 1$, то начнем число с комбинации 11171111, которая делится на 7. Число, составленное из единиц, которое стоит за ним, также делится на 7, так как оно разбивается на шестерки единиц.

Если $p = 3$, то, начав число с комбинации 7111, делящейся на 13, получим число, делящееся на 13.

Если $p = 4$, то начинаем число с комбинации 11711, делящейся на 7.

12. Переставим все четные вертикальные полоски вправо, а нечетные влево, после этого все четные горизонтальные полоски вниз, а нечетные вверх, как это показано на рисунке 2. При этом квадрат разделился на 4 прямоугольника, причем общая площадь двух черных прямоугольников равна суммарной площади двух белых прямоугольников. Отсюда следует, что или горизонтальная, или вертикальная прямая, которая

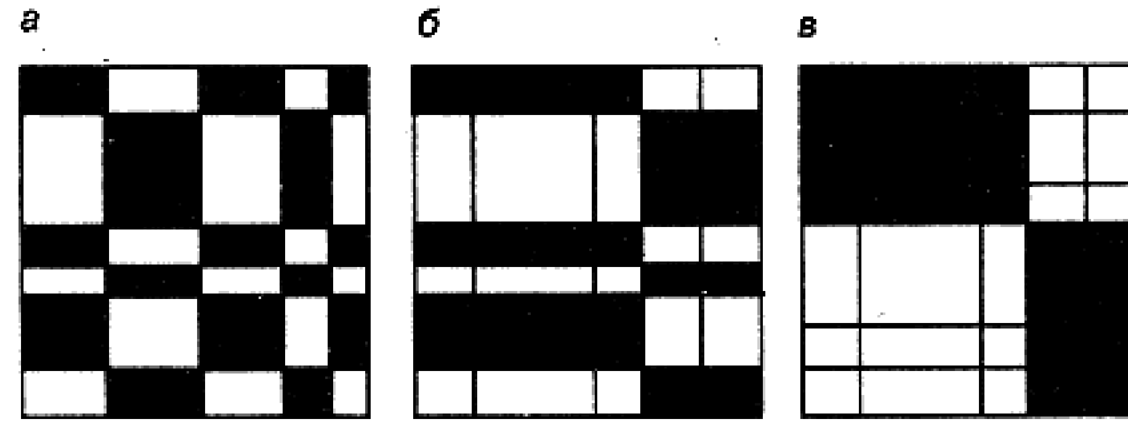

Рис. 2

проходит по сторонам этих прямоугольников, делит площадь квадрата пополам, откуда и вытекает утверждение задачи.

13. Такими числами являются лишь числа вида $125\cdot 10^k$, где k — целое неотрицательное число. Для остальных чисел указанная последовательность будет строго возрастающей.

14. Повернем треугольник ABC на 60° вокруг точки M, как это показано на рисунке 3. Точка A перейдет в точку A_1, точка B — в B_1, точка C — в C_1. Нетрудно видеть, что угол A_1B_1B равен углу CBM, поэтому треугольники A_1B_1B и CBM равны, так как равны попарно стороны, примыкающие к указанным углам. Значит, $A_1B = MC$.

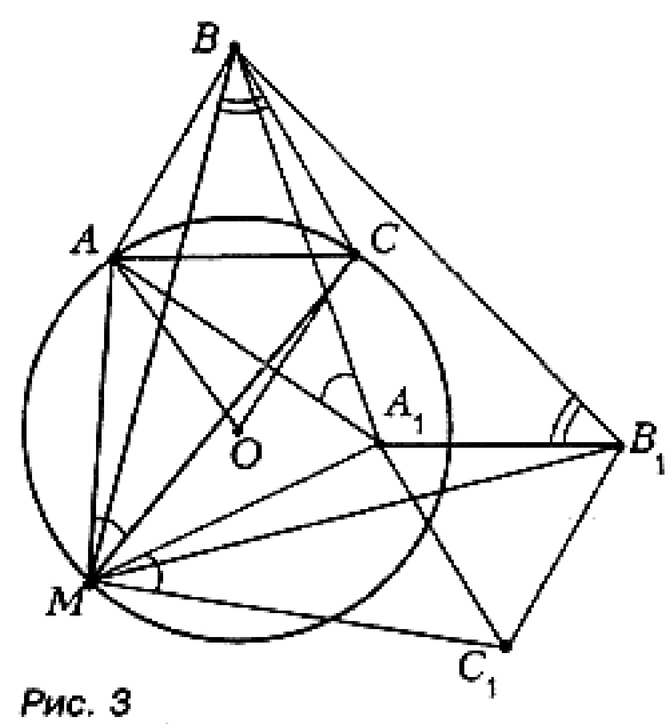

Рис. 3

Треугольники MAC и A_1AB равны по трем сторонам, а так как угол AMC = 30°, то и угол AA_1B равен 30°. Заметим, что угол MA_1A равен 60°, так как треугольник MAA_1 — равносторонний. Значит, угол MA_1B равен 90° и $MA_1^2 + A_1B^2 = MB^2$, но $MA_1 = MA$, а $A_1B = MC$. Утверждение задачи доказано.

15. Разобьем квадрат 19×19 на 24 прямоугольника 3×5 так, как указано на рисунке 4. Предположим, что в каждом из них закрашено не менее четырех клеток. Тогда всего в квадрате будет закрашено не менее $4\cdot 24 = 96$ клеток, что противоречит условию задачи. Следовательно, хотя бы в одном прямоугольнике 3×5 закрашено не более трех клеток. На рисунке 5 дан пример закраски 96 клеток квадрата, при которой в каждом прямоугольнике 3×5 закрашено не менее четырех клеток.

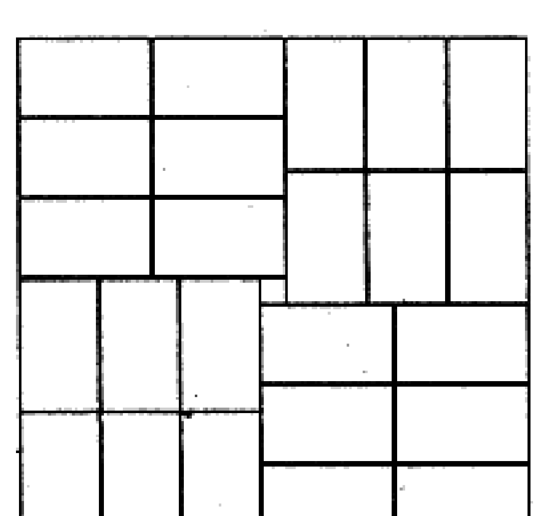

Рис. 4

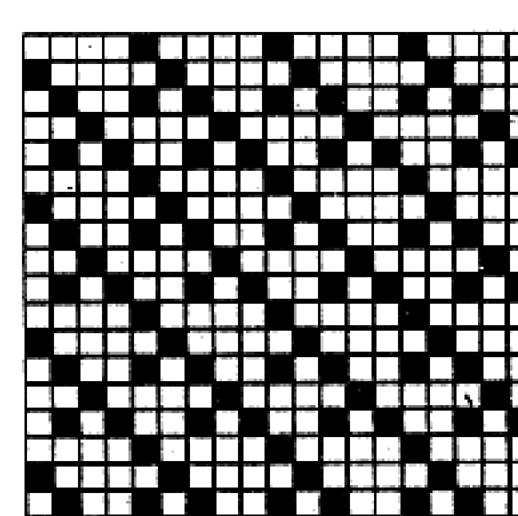

Рис. 5