и делящейся в точках пересечения со сторонами квадрата в отношении 3:4:3.

5. При каких значениях a уравнение

$$2\sqrt{1+2a-ax}=4-x$$

имеет единственное решение?

Вариант 2

(физико-технический факультет)

1. Покажите, что заданное число — целое:

$$(0{,}2)^{\log_5(0{,}5)}+\log_{\sqrt{3}}\frac{9}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+ + \log_{1/3}\frac{1}{7+2\sqrt{10}}.$$

2. Решите неравенство

$$(0{,}5)^{2\sqrt{x}+1}+(0{,}5)^{\sqrt{x}}<0{,}5+(0{,}5)^{\sqrt{x}+2}.$$

3. Найдите все значения p, при которых уравнение

$$x^2+2x-|x+1|+p=0$$

имеет столько же различных корней, сколько их у него при $p=-1$.

4. Найдите наименьшее положительное решение уравнения

$$2\sin^2 x+\sin x^2=1.$$

5. Углы треугольника образуют арифметическую прогрессию. Какова ее разность, если радиус описанной вокруг треугольника окружности втрое больше радиуса вписанной?

Вариант 3

(факультет экономики и менеджмента)

1. Решите уравнение

$$\cos x-\sin x+1+\sin 2x=0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_2\left(2^{x+1}+4^x-8^x\right)\le x-2.$$

3. При каких значениях параметра α сумма кубов корней уравнения

$$x^2+\sin\alpha\cdot x+\cos^2\alpha=0$$

равна (−1)?

4. Центр окружности C_1 радиусом 1 (точка O_1) лежит на окружности C_2 радиусом $r>1$ с центром в точке O_2. Окружность C_3 касается окружностей C_1 и C_2 внутренним образом, причем центр окружности C_3 лежит на прямой, перпендикулярной отрезку O_1O_2 и проходящей через точку O_2. При каком значении $r>1$ радиус окружности C_3 будет наименьшим? Чему он будет равен?

5. Для каждого действительного a решите систему неравенств

$$\begin{cases}ax-1>2a+3x,\\ 4x-5>a(1-x).\end{cases}$$

Вариант 4

(факультет технической кибернетики)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x-2y=1,\\ x^3+2y^2=1.\end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\log_2\left(x^2+6x\right)+4\log_{x^2+6x}2\le 4.$$

3. Найдите наибольшее действительное число $x\le 10$, для которого $x+\dfrac{1}{x}$ — целое число.

4. Найдите множество значений параметра a, при которых уравнение

$$5+a(\cos x-\sin x)+\sin 2x=2\sqrt{2}$$

имеет решение.

5. В треугольнике ABC угол $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$. Через центр H вписанной в треугольник ABC окружности проведена касательная l к окружности, проходящей через точки B, H и C. Пусть D — точка пересечения l со стороной AB. В каком отношении точка D делит сторону AB, если $BH=2HC$?

Публикацию подготовили
Е.Подсыпанин, С.Преображенский, Ю.Хватов

Китайская теорема об остатках и гипотеза Ченцова

(Начало см. на с. 39)

вым шагом в решении вопроса о распределении простых чисел. Чебышёв показал, что при больших N число $\pi(N)$ заключается в границах $0{,}92N/\ln N<\pi(N)<1{,}11N/\ln N$. Он доказал также, что если отношение $\pi(N):N/\ln N$ при $N\to\infty$ стремится к какому-либо пределу, то этот предел равен 1.

Доказательство существования этого предела было получено через 50 лет после работ П.Л.Чебышёва французским математиком Ж.Адамаром и потребовало искусного применения теории функций комплексного переменного. Элементарное (но очень сложное) доказательство было найдено замечательным датским математиком А.Сельбергом в 1948 году.

Несколько усовершенствовав доказательство (вполне элементарное, хотя и не простое) постулата Бертрана, можно доказать справедливость «усиленного» постулата Бертрана: *при любом $n\ge 9$ между n и $2n$ находится не менее трех простых чисел.*

Завершение доказательства гипотезы Ченцова

Поскольку $p_5=11$, из усиленного постулата Бертрана следует, что при всех простых $p\ge p_5$ между числами p и $2p$ имеется по крайней мере три простых числа, и потому с помощью конструкций рисунков 5 и 6 и китайской теоремы об остатках можно простроить $*$-набор длины $k\ge p_5+p_6-1=23$.

Для завершения доказательства достаточно простроить $*$-наборы длины k при $k=18, 19, 20, 21, 22$. Эти наборы строятся с помощью рисунка 3 (или рисунка 4) добавлением строк (при $k=18$, 19 добавляется строка 17| 1, 18, а при $k=20$, 21, 22 — еще и строка 19| 1, 20).

Гипотеза Ченцова полностью доказана.

Упражнение 7. Выпишите наименьшие числа $*$-наборов при $k=18, 19, 20, 21, 22$.

Литература

1. *Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. — М.: Физматлит, 1976.

2. *Э.Трост.* Простые числа. — М.: Физматгиз, 1959.

3. *А.Егоров.* Деление с остатком и сравнения по модулю. — «Квант» №6 за 1991 г. или Приложение к «Кванту» №2 за 1994 г.