Решение. Пусть a — первое из чисел $*$-набора длины 17. Из рисунка 3 видно, что a должно делиться на 2, 3, 7 и 13, давать при делении на 5 остаток 4, а при делении на 11 — остаток 6. Такое число существует по китайской теореме об остатках, так что задачу о существовании $*$-набора длины 17 можно считать решенной.

Упражнение 4. Найдите наименьшее a, удовлетворяющее условию задачи.

Наборов, обладающих свойством $(*)$ и имеющих одинаковое графическое изображение, эквивалентное рисунку 3, бесконечное множество. Наименьшие числа этих наборов принадлежат арифметической прогрессии с начальным членом 2184 и разностью

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030.$$

Рисунок 3 не является единственным графическим изображением $*$-наборов

2	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17
3	2, 5, 8, 11, 14, 17
5	1, 6, 11, 16
7	3, 10, 17
11	1, 12
13	4, 17

Рис. 4

длины 17. Другая возможность показана на рисунке 4.

Упражнение 5. Постройте наименьший возможный $*$-набор, графическим изображением которого служит рисунок 4.

Хотя рисунки 3 и 4 отличаются друг от друга, методы их построения похожи. На рисунке 3 число 7 встречается в прогрессиях, помещенных справа от 2, 3, 5; число $6 = 7 - 1$ встречается в арифметической прогрессии, расположенной справа от 11; число $8 = 7 + 1$ находится в арифметической прогрессии, расположенной справа от 7. Определим, какие числа от 1 до 17 не встречаются в прогрессиях, расположенных справа от 2, 3, 5, 7, 11. Среди чисел от 1 до 7 таких нет, потому что если таким числом является x, то $7 - x$ не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5. А поскольку между 5 и 7 нет простых, $x = 6$. Но 6 встречается в арифметической прогрессии, расположенной справа от 11.

Среди чисел от 8 до 17 только $14 = 7 + 7$ не принадлежит прогрессиям, расположенным справа от 13.

Приведенные объяснения позволяют понять, как возник рисунок 3. Аналогично строится набор чисел, графическое изображение которого приведено на рисунке 4.

Обобщение конструкции

Рассмотренный способ построения $*$-наборов длины 17 можно обобщить. На рисунках 5 и 6 показаны два возможных варианта построения $*$-набора длины k при $k = p_i + p_{i+1} - 1$, где p_i, p_{i+1} — соответственно i-е и $(i+1)$-е простое число. Напомним, что 2 — первое простое число, 3 — второе, 5 — третье и т.д. (например, $17 = p_1 + p_5 - - 1$). Нетрудно видеть, что при $2p_i >> p_{i+2}$, вне зависимости от значений членов арифметических прогрессий, расположенных справа от p_{i+3}, ..., рисунок 5

2	$\ldots, p_i - 2, p_i, p_i + 2, \ldots$
3	$\ldots, p_i - 3, p_i, p_i + 3, \ldots$
$\vdots$	
p_{i-1}	$\ldots, p_i - p_{i-1}, p_i, p_i + p_{i-1}$
p_i	$1, p_{i+1}, \ldots$
p_{i+1}	$p_{i-1}, p_i + p_{i-1} - 1$
p_{i+2}	$2p_i - p_{i+2}, 2p_i$
$\vdots$	

Рис. 5

является графическим изображением $*$-набора из $k = p_i + p_{i+1} - 1$ последовательных чисел. При $p_{i+2} \le \le 2p_i - 1$ аналогичным свойством обладает и рисунок 6. Таким образом, рисунки 5 и 6 являются графическими изображениями $*$-наборов из k последовательных чисел при $p_{i+2} \le 2p_i - 1$.

Убедимся в этом. На рисунке 5 в первых $i - 1$ строках правее черты и левее p_i находятся все числа $l \le p_i - 2$. В самом деле, поскольку $p_i - l < p_i$, число $p_i - l$ *заведомо делится* на одно

2	$\ldots, p_{i+1} - 2, p_{i+1}, p_{i+1} + 2, \ldots$
3	$\ldots, p_{i+1} - 3, p_{i+1}, p_{i+1} + 3, \ldots$
$\vdots$	
p_{i-1}	$\ldots, p_{i+1} - p_{i-1}, p_{i+1}, p_{i+1} + p_{i-1}, \ldots$
p_i	$\ldots, p_{i+1} - 1, p_{i+1} + p_i - 1, \ldots$
p_{i+1}	$1, p_{i+1} + 1$
p_{i+2}	$p_{i+1} - p_i, p_{i+1} + p_{i+2} - p_i$
$\vdots$	

Рис. 6

из простых чисел, *меньших* p_i, и, следовательно, принадлежит одной из прогрессий, стоящих над i-й строчкой таблицы.

Аналогично, числа l, *большие* $p_i + 1$ и не превосходящие $p_i + p_{i+1} - 2$, кроме, может быть, числа $2p_i$, находятся в первых $i - 1$ строчках правее числа p_i. Строчки с номерами i, $i + 1$ обеспечивают наличие общего простого делителя у чисел с номерами 1 и $p_i + 1$, p_{i-1} и $p_i + + p_{i+1} - 1$, а при $2p_i > p_{i+2}$ у чисел с номерами $2p_i$ и $2p_i - p_{i+2}$.

Таким образом, с помощью рисунка 5 и китайской теоремы об остатках мы можем получить $*$-набор длины $p_i + + p_{i+1} - 1$, если $2p_i > p_{i+2}$.

При $p_{i+2} \le 2p_i - 1$ таким же свойством обладает и рисунок 6 для $k = p_{i+1} + + p_{i+2} - 1$.

Упражнение 6. Убедитесь в этом самостоятельно.

Для каждого k, принадлежащего отрезку $[p_{i+1} + p_i - 1, p_{i+1} + p_{i+2} - 1]$, на основе рисунка 6 возможно построение $*$-набора длины k. Если $k = p_{i+1} + p_i$, рисунок 6 необходимо дополнить строчкой

$$p_{i+3} | p_{i+1} + p_i - p_{i+3}, p_{i+1} + p_i,$$

а при $k = p_{i+1} + p_{i+1} = 2p_{i+1}$ добавить также строчку

$$p_{i+1} | 2p_{i+1} - p_{i+4}, 2p_{i+1}.$$

Нетрудно видеть, что приведенные операции возможны при $p_{i+1} + p_i > p_{i+3}$ и $2p_{i+1} > p_{i+4}$. Очевидно, что оба неравенства справедливы, в частности, если между p_i и $2p_i$ и p_{i+1} и $2p_{i+1}$ находится не менее *трех* простых чисел. Следовательно, в этом случае для каждого числа k, принадлежащего отрезку $[p_{i+1} + p_i - 1, p_{i+1} + p_{i+2} - 1]$, можно простроить $*$-набор из k чисел. Аналогично получим, что если между p_{i+2} и $2p_{i+2}$ находится не менее трех простых чисел, то и для любого k, принадлежащего $[p_{i+1} + p_{i+2} - 1, p_{i+2} + p_{i+3} - 1]$, можно построить $*$-набор длины k. Следовательно, *если для каждого простого числа p, начиная с p_i, между p и $2p$ находится не менее трех простых чисел, то для любого $k \ge p_i + p_{i+1} - 1$ можно построить $*$-набор длины k.*

Постулат Бертрана

В 1845 году французский математик Ж.Бертран высказал предположение, что между n и $2n$ при $n \ge 2$ *находится, по крайней мере, одно простое число.* Это предположение получило название *постулата Бертрана.*

Доказал постулат Бертрана выдающийся русский математик П.Л.Чебышёв. Более того, он показал, что число $\pi(N)$ простых чисел, не превосходящих N, имеет порядок $N/\ln N$; эта замечательная теорема стала пер-

(Продолжение см. на с. 52)