# Китайская теорема об остатках и гипотеза Ченцова

**Д.ФЛЕЙШМАН**

## Постановка задачи

Настольной книгой любителей математики является замечательная книга [1]. В ней собраны различные нестандартные задачи по всем разделам школьной программы, в том числе и задачи на делимость чисел.

Полное решение одной из таких задач не было известно авторам. Один из них — молодой талантливый математик, впоследствии член-корреспондент АН СССР Н.Н.Ченцов (1930—1992) — высказал гипотезу о том, что *для любого натурального числа $k \geq 17$ можно найти $k$ последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного, взаимно простого со всеми остальными.*

## Предварительные замечания

Нетрудно видеть, что любые два последовательных натуральных числа всегда взаимно просты. Из трех последовательных натуральных чисел $l$, $l+1$ и $l+2$ число $l+1$ всегда взаимно просто с остальными. Из четырех последовательных натуральных чисел $l$, $l+1$, $l+2$ и $l+3$ в зависимости от четности $l$ либо $l+1$, либо $l+2$ взаимно просто с остальными.

Оказывается, что при любом $5 \leq k \leq 16$ среди $k$ оследовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными.

**Упражнения**

1. Докажите это.
2. Докажите, что произведение двух последовательных целых чисел не является $n$-й степенью никакого целого числа при $n \geq 2$.
3. Докажите утверждение упражнения 2 для произведения а) трех; б) четырех последовательных натуральных чисел.

Однако существуют 17 последовательных натуральных чисел, каждое из которых имеет общий делитель с каким-нибудь из этих 17 чисел.

## Случай $k = 17$

Заметим, что если какие-то два из $k$ последовательных натуральных чисел имеют общий делитель, то существует простое число, меньшее чем $k$, которое является делителем этих чисел.

Будем говорить, что набор из $k$ *последовательных натуральных чисел обладает свойством* (*), *если среди них нет ни одного числа, взаимно простого со всеми остальными.* Мы будем называть такие набор *-*наборами длины* $k$.

Рассмотрим набор из $k$ последовательных натуральных чисел. Пронумеруем их натуральными числами от 1 до $k$. Делимость чисел из набора на простые числа от 2 до $p_0$, где $p_0$ — наибольшее простое число, не превышающее $k-1$, удобно показывать на рисунке, где слева от черты находится *простое число*, а справа — *номера тех чисел из набора, которые делятся на это простое число.*

Поясним это на примере. Возьмем семь последовательных целых чисел: 100, 101, ..., 106. Простые числа, меньшие 7, т.е. 2, 3, 5, запишем столбиком, затем проведем вертикальную прямую, правее которой напротив каждого из простых чисел выпишем номера чисел из набора, делящихся на это простое число (рис.1).

| | |
|---|---|
| 2 | 1, 3, 5, 7 |
| 3 | 3, 6 |
| 5 | 1, 6 |

Рис. 1

Справа от черты ни разу не встречаются числа 2 и 4. Это означает, что числа с этими номерами взаимно просты с остальными.

На рисунке 2 показана делимость чисел от 25 до 44 на простые числа от 2 до 19.

На рисунках 1 и 2 справа от черты находятся арифметические прогрессии, составленные из разного (от 1 до 10) числа членов.

Нетрудно видеть, что эта закономерность носит общий характер. Именно, *набор из $k$ последовательных натуральных чисел будет *-набором тогда и только тогда, когда на соответствующем этому набору рисунке каждое из чисел от 1 до $k$ встречается справа от черты в одной строчке по крайней мере с еще одним числом.* На рисунке 2 числа 10 и 14 стоят в последних строчках в гордом одиночестве, а некоторые числа отсутствуют вовсе.

| | |
|---|---|
| 2 | 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 |
| 3 | 3, 6, 9, 12, 15, 18 |
| 5 | 1, 6, 11, 16 |
| 7 | 4, 11, 18 |
| 11 | 9, 20 |
| 13 | 2, 15 |
| 17 | 10 |
| 19 | 14 |

Рис. 2

Согласно этому критерию наборы чисел, изображенные на рисунках 1 и 2, не обладают свойством (*). На рисунке 3 изображено, каким мог бы быть *-набор из 17 последовательных натуральных чисел.

| | |
|---|---|
| 2 | 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 |
| 3 | 1, 4, 7, 10, 13, 16 |
| 5 | 2, 7, 12, 17 |
| 7 | 1, 8, 15 |
| 11 | 6, 17 |
| 13 | 1, 14 |

Рис. 3

Существование такого набора мы вскоре докажем.

## Китайская теорема об остатках

Напомним, что «китайская теорема об остатках» — это известное с глубокой древности утверждение о том, что *если натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$ попарно взаимно просты, то, каковы бы ни были целые числа $b_1, \ldots, b_n$ $(0 \leq b_i \leq a_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n)$, существует натуральное число, дающее при делении на $a_1$ остаток $b_1$, при делении на $a_2$ остаток $b_2$, ..., $a_n$ — остаток $b_n$. Таких чисел бесконечно много и все они являются членами некоторой арифметической прогрессии* (см. [3]).

**Задача.** *Постройте набор из 17 последовательных натуральных чисел, обладающий свойством (*), на основе рисунка 3.*