жем, что по крайней мере одно из чисел y_i равно 0, откуда и вытекает утверждение задачи.

Для каждого i обозначим через S_i множество индексов $\{i+1, i+2, \ldots, i+p+q\}$. Пусть r — число таких $j \in S_i$, для которых $x_j - x_{j-1} = p$. Тогда число таких $j \in S_i$, для которых $x_j - x_{j-1} = -q$, равно $p+q-r$. Суммируя эти равенства по всем $j \in S_i$, получаем:

$$y_i = rp - (p+q-r)q = (p+q)(r-q),$$

т.е. y_i делится на $t = p + q$ при всех i. Теперь рассмотрим выражение $y_{i+1} - y_i$:

$$y_{i+1} - y_i = \left(x_{i+p+q+1} - x_{i+1}\right) - \left(x_{i+p+q} - x_i\right) =$$

$$= \left(x_{i+p+q+1} - x_{i+p+q}\right) - \left(x_{i+1} - x_i\right).$$

Каждая скобка в последнем равенстве есть p или $-q$, поэтому $y_{i+1} - y_i$ равно 0 или $\pm(p+q)$. Итак, в последовательности $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-p-q-1}, y_{n-p-q}$ есть два числа разных знаков (если предположить, что все y_i отличны от нуля). Но каждое y_i делится на $p+q$, а разность между соседними числами есть 0 или $\pm(p+q)$, следовательно, есть y_i, равное нулю.

С.Рукшин

Ф1583. *Автомобиль массой $M = 1000$ кг разгоняется по окружности радиусом $R = 100$ м из состояния покоя. Какая необходима мощность двигателя для максимально быстрого разгона? Коэффициент трения колес о землю $\mu = 0{,}7$, все колеса автомобиля ведущие.*

Мощность двигателя ограничивает «темп» разгона автомобиля. В самом начале разгона сила трения (именно она и разгоняет автомобиль) направлена вдоль вектора скорости, но мощность получается небольшой потому, что скорость еще мала по величине. В конце разгона, когда автомобиль почти достиг предельной скорости v_0, которая определяется из соотношения $v_0^2/R = \mu g$, сила трения практически перпендикулярна вектору скорости и мощность опять получается небольшой. Ясно, что нужно искать некоторое промежуточное состояние, в котором произведение скорости на касательную (тангенциальную) составляющую силы трения достигнет максимума.

Если скорость автомобиля в некоторый момент равна v, то сила трения μg имеет центростремительную (нормальную) составляющую Mv^2/R, при этом ее касательная составляющая равна $f = \sqrt{(\mu Mg)^2 - \left(Mv^2/R\right)^2}$, а требуемая мощность определяется произведением fv. Максимум этой величины найдем обычным способом, только вначале сделаем упрощения — возведем fv в квадрат (максимум останется там же, но арифметика получится попроще) и введем обозначение $x = v^2/R$. Теперь нам нужно исследовать функцию

$$A = Rx\left((\mu Mg)^2 - (Mx)^2\right).$$

Ее максимум находим при помощи производной:

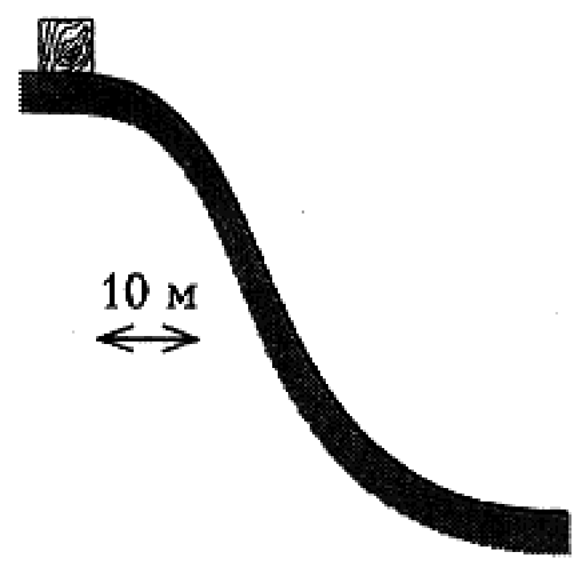
$$x_0 = \frac{\mu g}{\sqrt{3}}.$$

Тогда необходимая мощность будет равна

$$N = \sqrt{A_0} = \mu Mg\sqrt{\frac{2\mu gR}{3\sqrt{3}}} \approx 115 \text{ кВт} \approx 150 \text{ л.с.}$$

А.Повторов

Ф1584. *На рисунке показан профиль гладкой горки, по которой скользит без начальной скорости тело*



маленького размера. Найдите максимальную величину ускорения тела. Найдите также максимальную перегрузку, действующую на тело при таком движении (перегрузка показывает, во сколько раз вес тела превышает действующую на него силу тяжести).

Чертеж довольно мелкий, и получить хорошую точность очень трудно — мы и надеяться не будем, а решим задачу очень приближенно. При движении тела максимальная скорость получится внизу. По чертежу определим высоту горки: $h \approx 50$ м и найдем эту скорость из закона сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv^2}{2},\ v = \sqrt{2gh} \approx 32 \text{ м/с}.$$

Опять же из чертежа определим радиус кривизны горки в нижней части: у нас получилось $R \approx 30$ м и вычислим центростремительное ускорение тела в нижней части горки:

$$a = \frac{v^2}{R} \approx 33 \text{ м/с}^2.$$

Это значение существенно превышает величину ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2, и можно считать, что максимальная перегрузка и максимальное ускорение достигаются практически в этой нижней точке. Таким образом, максимальное ускорение

$$a_{\max} = a \approx 33 \text{ м/с}^2,$$

а максимальную перегрузку найдем из уравнения второго закона Ньютона:

$$N - mg = ma_{\max},\ N = m\left(g + a_{\max}\right),\ \frac{N}{mg} \approx 4{,}3.$$

Р.Александров

Ф1585. *В системе, изображенной на рисунке, трение отсутствует. В начальный момент все тела удерживают, при этом свисающие концы нитей вертикаль-*