М1574. *В выпуклом шестиугольнике ABCDEF* $AB \parallel ED$, $BC \parallel FE$ *и* $CD \parallel AF$. *Пусть* R_A, R_C *и* R_E — *радиусы окружностей, описанных около треугольников FAB, BCD и DEF соответственно, а p — полупериметр шестиугольника. Докажите, что*

$$R_A + R_C + R_E \ge p.$$

Первое решение. Пусть длины сторон AB, CB, CD, DE, EF и FA равны a, b, c, d, e и f соответственно. Построим $AP \perp BC$, $AS \perp EF$, $DQ \perp BC$, $DR \perp EF$. Тогда $PQRS$ — прямоугольник и $BF \ge PS = QR$. Следовательно, $2BF \ge PS + QR$ и тогда $2BF \ge$ $\ge (a\sin B + f\sin C) + (c\sin C + d\sin B)$ (мы воспользовались тем, что $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ и $\angle C = \angle F$). Аналогично,

$$2DB \ge (c\sin A + b\sin B) + (e\sin B + f\sin A),$$

$$2FD \ge (e\sin C + d\sin A) + (a\sin A + b\sin C).$$

Запишем выражения для R_A, R_C и R_E:

$$R_A = \frac{BF}{2\sin A},\ R_C = \frac{DB}{2\sin C} \text{ и } R_E = \frac{FD}{2\sin B}.$$

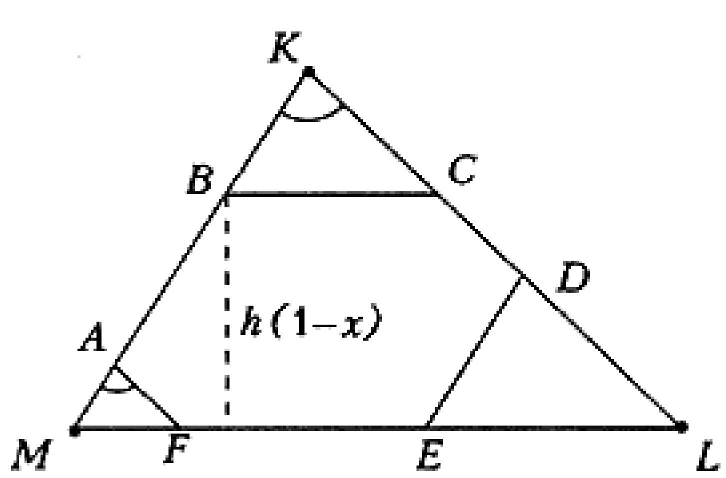
Таким образом,

$$4(R_A + R_C + R_E) \ge$$
$$\ge a\left(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B}\right) + b\left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B}\right) + \ldots \ge 2(a + b + \ldots) = 4p,$$

следовательно, $R_A + R_C + R_E \ge p$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\angle A = \angle B = \angle C$ и $BF \perp BC$, т.е. в случае правильного шестиугольника.

Н.Седракян

Второе решение. Рассматриваемый шестиугольник $ABCDEF$ можно получить из некоего треугольника KLM, проведя прямые, параллельные сторонам этого треугольника (см. рисунок).



Пусть $KL = m$, $LM = k$, $MK = l$, $\angle LKM = \delta$, высота к стороне LM равна h, коэффициенты подобия (гомотетии) треугольников KCB, DLE и AFM по отношению к треугольнику KLM равны соответственно x, y, z. Понятно, что

$$x + y \le 1,\ y + z \le 1,\ z + x \le 1 \qquad (*)$$

(мы допускаем ниже и случаи равенства). Если R — радиус окружности, описанной около треугольника ABF,

$$R = \frac{BF}{2\sin\delta} \ge \frac{h(1-x)}{2\sin\delta} = \frac{S_{KLM}(1-x)}{2k\sin\delta} = \frac{lm}{k}(1-x).$$

Оценивая аналогично другие радиусы и выражая стороны шестиугольника через k, l, m, x, y, z, получим, что нам достаточно доказать неравенство

$$\frac{lm}{k}(1-x) + \frac{mk}{l}(1-y) + \frac{kl}{m}(1-z) \ge$$
$$\ge k(1 + x - y - z) + l(1 + z - x - y) + m(1 + y - z - x).\ (**)$$

Это неравенство линейно относительно x, y, z. Но переменные x, y, z неотрицательны и удовлетворяют еще условию $(*)$ (на самом деле они больше нуля и неравенства $(*)$ строгие, но мы несколько расширяем область их изменения). Областью изменения их является многогранник в координатном пространстве $(x; y; z)$ с вершинами $(0; 0; 0)$, $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$, $(1/2; 1/2; 1/2)$. Достаточно проверить, что неравенство $(**)$ выполняется в этих вершинах. Например, при $x = y = z = 1/2$ и при $x = y = z = 0$ получаем неравенство

$$\frac{kl}{m} + \frac{lm}{k} + \frac{mk}{l} \ge k + l + m;$$

оно легко доказывается сложением очевидных неравенств

$$\frac{kl}{m} + \frac{mk}{l} \ge 2k,\ \frac{kl}{m} + \frac{lm}{k} \ge 2l,\ \frac{lm}{k} + \frac{mk}{l} \ge 2m.$$

Для остальных трех вершин неравенство $(**)$ очевидно.

И.Шарыгин

Замечание. Для центрально-симметричных шестиугольников эта задача эквивалентна замечательному неравенству Эрдеша–Морделла: для любой точки M внутри треугольника сумма растояний от M до вершин по крайней мере вдвое больше суммы расстояний от M до сторон (опустите перпендикуляры MB, MD, MF на стороны и постройте параллелограммы $BMFA$, $DMBC$, $FMDE$; радиусы описанных окружностей треугольников BMF, DMB, FMD равны R_A, R_C, R_E в условии и равны расстояниям от точки M до вершин треугольника).

М1575. *Пусть n, p, q — положительные целые числа такие, что* $n > p + q$, *а* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — *целые числа такие, что*
(i) $x_0 = x_n = 0$;
(ii) для каждого целого i $(1 \le i \le n)$ *выполняется одно из равенств* $x_i - x_{i-1} = p$ *или* $x_i - x_{i-1} = -q$. *Докажите, что существует пара индексов* $(i; j)$ $(i < j$ *и* $(i; j) \ne$ $\ne (0; n))$ *такая, что* $x_i = x_j$.

Заметим сначала, что без ограничения общности можно считать числа p и q взаимно простыми, так как если p и q имеют общий делитель $d > 1$, то утверждение задачи не изменится, если разделить p, q и все x_i на d. Пусть есть k индексов $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ таких, что $x_i -$ $- x_{i-1} = p$. Тогда число индексов i таких, что $x_i - x_{i-1} =$ $= -q$, равно $n - k$. Так как $x_n = x_0 = 0$, то $kp =$ $= (n - k)q$, что в силу взаимной простоты p и q влечет $k = aq$, $n - k = ap$ для некоторого натурального a. Следовательно, $n = a(p + q)$, а раз $n > p + q$, то $a > 1$. Аналогично можно доказать, что x_i может равняться x_{i+m} лишь при m, кратном $p + q$. Поэтому естественно рассмотреть приращения $x_{i+t} - x_i$ за $t = p + q$ шагов. Пусть $y_i = x_{i+p+q} - x_i$ для $i \in \{0, 1, \ldots, n - p - q\}$. Так как $n > p + q$, то таких y_i по меньшей мере 2. Заметим, что $y_0 + y_{p+q} + y_{2p+2q} + \ldots + y_{n-p-q} = 0$, следовательно, y_i не могут быть все одного знака. Мы пока-