Решения задач М1571 — М1575, Ф1583 — Ф1592

М1571. *Дана прямоугольная доска ABCD со сторонами AB = 20, BC = 12, разбитая на 20×12 единичных квадратов. Пусть r — данное положительное целое число. За один ход монету можно передвинуть из одного единичного квадрата в другой в том и только том случае, когда расстояние между их центрами равно $\sqrt{r}$. Требуется найти последовательность ходов, переводящую монету из единичного квадрата с вершиной A в единичный квадрат с вершиной B.*
а) Докажите, что это невозможно, если r делится на 2 или на 3.
б) Докажите, что это можно сделать, если r = 73.
в) Можно ли это сделать при r = 97?

Введем прямоугольную систему координат с началом в точке A, направив оси Ax и Ay по сторонам AB и AD данного прямоугольника, с единицей длины, равной стороне единичного квадрата. Наша задача — найти путь из точки (0; 0) в точку (19; 0) такой, что для каждого хода $(x; y) \to (x + a,\ y + b)$ выполняется равенство $a^2 + b^2 = r^2$.

а) Если r четно, то для каждого целого решения уравнения $a^2 + b^2 = r^2$ сумма $a + b$ тоже четна. Для каждой целой точки $(x;\ y)$, в которую можно попасть из (0; 0), $x + y$ четно. Следовательно, попасть в точку (19; 0) невозможно.

Если r делится на три, то для каждого целого решения $(a;\ b)$ уравнения $a^2 + b^2 = r^2$ и a, и b должны делиться на 3. Поэтому попасть в точку (19; 0) невозможно.

б) Один из примеров движения монеты из (0; 0) в (19; 0) при $r = 73 = 8^2 + 3^2$ такой:

$$(0;\ 0) \to (3;\ 8) \to (11;\ 5) \to (19;\ 2) \to (16;\ 10) \to$$
$$\to (8;\ 7) \to (0;\ 4) \to (8;\ 1) \to (11;\ 9) \to (3;\ 6) \to (11;\ 3) \to$$
$$\to (19;\ 0).$$

в) Пусть $R = \{(i;j):\ 0 \le i \le 19,\ 0 \le j \le 11\}$, $P = \{(i;i):\ 0 \le i \le 19,\ 4 \le j \le 7\}$, Q — их разность: $Q = R \setminus P$. Так как число 97 представляется в виде суммы квадратов единственным образом: $9^2 + 4^2$, то каждый ход состоит из одного из векторов $(\pm 9; \pm 4)$, $(\pm 4; \pm 9)$. Легко проверить, что ход типа $(\pm 9; \pm 4)$ из точки множества P всегда приводит нас в точку из Q и наоборот, тогда как ход типа $(\pm 4; \pm 9)$ не выводит нас из множества Q (заметим, что за один шаг нашими ходами нельзя попасть из точки из P в точку из P). Каждый ход типа $(\pm 9; \pm 4)$ изменяет четность x-координаты, поэтому, чтобы попасть из (0; 0) в (19; 0), требуется нечетное число таких ходов. Каждый такой ход приводит нас от точки из P в точку из Q и наоборот. Значит, после нечетного числа ходов из точки $(0;\ 0) \in Q$ попадем в точку из P, но $(19;\ 0) \in Q$. Поэтому требуемое невозможно.

Д.Терешин

М1572. *Известно, что внутри треугольника ABC нашлась точка P такая, что ∠APB − ∠ACB = ∠APC − ∠ABC. Пусть D и E — центры окружностей, вписанных в треугольники APB и APC соответственно. Докажите, что а) прямые AP, BD и CE пересекаются в одной точке; б) прямые AP, BE и CD также пересекаются в одной точке.*

а) Пусть основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны BC, CA и AB — точки X, Y и Z соответственно. Тогда из рассмотрения вписанных четырехугольников $AZPY$, $BXPZ$ и $CYPX$ получается, что $YZ = PA \cdot \sin\angle A$ и $\angle YXZ = \angle BPC - \angle A$. Аналогично, справедливы равенства $XY = CP \cdot \sin\angle C$, $XZ = BP \cdot \sin\angle B$, $\angle XZY = \angle APB - \angle C$, $\angle XYZ = \angle APC - \angle B$. Пусть BD и CE пересекают AP в точках Q и R соответственно. По свойству биссектрисы $AQ/QP = AB/BP$ и $AR/RC = AC/CP$, поэтому если $AB/BP = AC/CP$, то точки R и Q совпадают. Итак, докажем, что $AB/BP = AC/CP$. Мы знаем, что $\angle APB - \angle C = \angle APC - \angle B$, следовательно, $\angle XZY = \angle XYZ$, т.е. $XY = XZ$. Поэтому $CP \cdot \sin\angle C = BP \cdot \sin\angle B$, значит, $AB \cdot CP = AC \cdot BP$, откуда и следует требуемое.

б) Докажем, что AP, BE и CD пересекаются в одной точке. Действительно, рассмотрим (невыпуклый) шестиугольник $QECPBD$, где Q — точка пересечения AP, BD и CE. Указанные прямые являются его главными диагоналями, а они, как известно (это несложно проверить с помощью теоремы синусов), пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$QE \cdot CP \cdot BD = EC \cdot PB \cdot DQ.$$

Последнее равенство вытекает из того, что PE и PD — биссектрисы углов QPC и QPB (достаточно перемножить равенства $PQ/CP = QE/EC$ и $PB/PQ = BD/DQ$).

Замечание. Задача имеет и много других решений. Основные идеи четырех из них: окружности Аполлония, теорема Бретшнайдера, переход к изогонально сопряженной точке, построения вспомогательных подобных треугольников.

Д.Терешин

М1573. *Положительные целые числа x и y таковы, что числа 5x + 16y и 6x − 15y оба являются квадратами положительных целых чисел. Найдите наименьшее возможное значение, которое может принимать минимум из этих двух квадратов.*

В такой формулировке задача почти очевидна. Ответ: минимум равен 9 и достигается при $x = 4$, $y = 1$ (ясно, что первое число всегда больше 9, а второе делится на 3).

Читатели, которые прислали нам письма с недоуменными вопросами: неужели такая задача предлагалась на международной олимпиаде, — разумеется, правы. А виноват во всем компьютер: мы давно замечали, что он при переносе текста из одной программы в другую почему-то часто пропускает цифру 1, но на этот раз оказались выброшенными сразу две единицы! На олимпиаде предлагалась задача, в которой линейные выражения равнялись $15x + 16y$ и $16x - 15y$. Ответ в ней: $(13 \cdot 37)^2$, и наиболее короткое решение использует малую теорему Ферма (если p — простое число, то $a^{p-1} - 1$ делится на p при любом целом a, не кратном p): достаточно рассмотреть сумму квадратов величин $u^2 = 15x + 16y$ и $v^2 = 16x - 15y$ — она равна

$$u^4 + v^4 = 13 \cdot 37\left(x^2 + y^2\right),$$

а $u^4 + v^4$ делится на простое число p вида $4k + 1$, где k — нечетно (в частности, $p = 13$ и $p = 37$), только при u и v, делящихся на p.

В.Сендеров