структуры порождаются скобками в арифметических выражениях.

Например, структура (()())() может быть представлена выражением $(7-(5+2)-(3-4))+(3-8)$, а структура ()(()) — выражением $(2+3)-((5-3)-9)$.

Вот пример всех скобочных структур, порожденных не более чем тремя парами скобок:

(), ()(), ()()(), (()), ()(()), (())(), (()()), ((())).

Число регулярных скобочных структур из n пар скобок задает последовательность

$$1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ \ldots$$

известную, как *числа Каталана*.

Правила вывода этого языка задаются двумя правилами:

1) $S \to$,

2) $S \to S(S)$.

Вот вывод слова

(()())():

$S \to S(S) \to S(S)(S) \to S(S(S))(S) \to$
$\to S(S(S)(S))(S) \to (()())()$.

Упражнение 6. Выведите слово ((()())()).

Задачи

14. Напишите программу, выводящую регулярные скобочные структуры.

15. Найдите где-нибудь определение чисел Каталана и докажите по индукции, используя правила вывода, что число скобочных структур из n пар скобок задается числами Каталана.

16. Рассмотрим язык, содержащий только конечное число слов. Напишите грамматические правила такого языка.

17. Придумайте правила вывода в языке, порожденном двумя символами 0 и 1, во всех словах которого символы 1 стоят перед символами 0. Например, 111100 и т.д.

18. Рассмотрим язык регулярных скобочных структур, содержащих две пары скобок () и []. Напишите грамматические правила для этого языка.

Как мы уже говорили, основное свойство системы Фибоначчи — это отсутствие двух единиц подряд в записи любого числа. Тогда язык Фибоначчи — это язык всех слов в алфавите из двух букв 0 и 1, не содержащих подслова 11.

Вот все фибоначчиевы слова, содержащие не более четырех букв:

0, 1,
00, 01, 10,
000, 001, 010, 100, 101,
0000, 0001, 0010, 0100, 0101, 1000,
1001, 1010.

Это хорошо знакомые вам 1-, 2-, 3- и 4-значные числа системы счисления Фибоначчи. Попробуем сформулировать грамматические правила. Но мы уже формулировали что-то похожее на них:

ф2.0) перед цифрой 0 может стоять любая цифра,

ф2.1) перед цифрой 1 может стоять только цифра 0.

Действительно, эти правила позволяли по числу длины n строить число длины $n+1$. Осталось их только записать в виде КС-грамматики. Заметим, что слова в примерах 3, 4, и 5 порождаются по-разному: в примерах 3 и 4 — слева направо, а в примере 5 — справа налево. Правила из примеров 3 и 4 называются праворекурсивными, а из примера 5 — леворекурсивными. Правила для чисел Фибоначчи «ф2.0» и «ф2.1» леворекурсивны, а алгоритмы (A), (B) и (C) — праворекурсивны! Попробуем переписать наши правила на праворекурсивные. Получаем:

f2.0) после цифры 0 может стоять любая цифра,

f2.1) после цифры 1 может стоять только цифра 0.

Чтобы построить КС-грамматику Фибоначчи (Φ), введем 2 нетерминальных символа L_0 и L_1. Первый символ будет «помнить», что перед ним стояла цифра 0, а второй — что стояла цифра 1. Тогда грамматические правила запишутся так:

(1) $L_0 \to 0L_0$,
(2) $L_0 \to 1L_1$,
(3) $L_1 \to 0L_0$.

Осталось только дописать правила исчезновения нетерминальных символов. Окончательно все правила выглядят так:

(1) $L_0 \to$,
(2) $L_1 \to$,
(3) $L_0 \to 0L_0$,
(4) $L_0 \to 1L_1$,
(5) $L_1 \to 0L_0$.

Начальный символ L_0.

Упражнения

7. Выведите слова 0100, 0101.

8. Докажите, что любое слово фибоначчиева языка может быть получено из этих грамматических правил.

Задача 19. Придумайте какие-нибудь другие грамматические правила для фибоначчиева языка.

Упражнение 9. Придумайте для языков примеров 1 и 2 леворекурсивные грамматические правила.

Попробуем теперь также сформулировать алгоритм (C) (прочитайте еще раз внимательно, как делается индукционный шаг в теореме 5). Посмотрим на зеленый вагон a, который мы вставили правее синего b. Во время второго роспуска (и всех последующих) a попадает в тот же стек, что и b. Это означает, что предпоследние символы (да и во всех следующих разрядах) у a и b совпадают. Пусть предпоследний разряд у них l. Но при первом роспуске зеленый вагон попал в стек, из которого вагоны вытягиваются. Это означает, что последний символ в «номере» зеленого вагона — ноль (договоримся, что вытягиваются вагоны из нулевого стека). Получается первое правило:

с1) «после цифры l может стоять цифра 0».

Рассмотрим теперь желтые вагоны. Ясно, что последний символ в их номере 0, а предпоследний $k-1$. Получаем следующее правило:

с2) «после цифры $k-1$ может стоять цифра 0».

И наконец, рассмотрим синий вагон. Предпоследний символ в его номере — l. А вот последний — $l+1$, ведь вытянув первый раз из 0-го стека, мы сдвинули нумерацию стеков на единицу! Последнее правило:

с3) «после цифры l может стоять цифра $l+1$».

Теперь так же, как и в случае грамматики (Φ), рассмотрим грамматику (Q_k) с k терминальными символами

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,$$

k нетерминальными символами

$$L_0,\ L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_{k-1}$$

и правилами вывода:

$L_{i-1} \to 0L_0$,
$L_{i-1} \to iL_i \quad (1 \le i < k-1)$,
$L_{k-1} \to 0L_0$,
$L_i \to \quad (1 \le i < k-1)$,

где L_0 — главный нетерминальный символ. Ясно, что при $k=2$ грамматика (Q_2) совпадает с (Φ) и, следовательно, совпадают языки, ими порожденные. Так же, как и в случае поразрядной сортировки Фибоначчи (F), можно сформулировать

Алгоритм (*K*) обобщенной поразрядной сортировки Фибоначчи

(1) Породим в языке Q_k все слова длины $p-1$, где $W(p-1, k) < n \le W(p, k)$, лексикографически