будем называть *горкой*. Фиксировано число k. Разрешается, вынимая элементы снизу стопки, раскладывать их на k стопок, т.е. элементы в стопках расположены в том же порядке, что и в стопке на горке. Эти новые стопки и есть стеки, а описанная операция — роспуск. Дальше все элементы из некоторого стека можно переносить на горку, не меняя порядок. Эта операция — вытягивание. Перемещать элементы на горку можно из нескольких стеков. Будем считать (хотя это не принципиально), что элементы из следующего стека подкладываются снизу под стопку, уже существующую на горке. В конце мы хотим получить упорядоченное множество 1, 2, 3, ..., n. Шагом называются все действия между двумя последовательными роспусками.

Прежде чем читать дальше, попробуйте самостоятельно решить несколько задач. Во всех задачах, если не оговорено противное, будем считать, что все стеки «бесконечные», т.е. могут вместить сколько угодно вагонов, хоть весь состав.

Задачи

2. Докажите, что каждый состав можно отсортировать за $n-1$ шаг и $2n-2$ вытягивания.

3. Отсортируйте состав, идущий в порядке 4, 3, 2, 1, на горке с двумя стеками ($k = 2$)

а) за наименьшее число шагов;

б) за наименьшее число вытягиваний.

4. Отсортируйте состав, вагоны которого идут в порядке 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, на горке с двумя стеками ($k = 2$)

а) за наименьшее число шагов;

б) за наименьшее число вытягиваний.

5. Отсортируйте состав, вагоны которого идут в порядке 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, на горке с тремя стеками ($k = 3$)

а) за наименьшее число шагов;

б) за наименьшее число вытягиваний.

6. Отсортируйте состав, идущий в порядке 5, 7, 1, 3, 2, 6, 4, на горке с двумя стеками ($k = 2$)

а) за наименьшее число шагов;

б) за наименьшее число вытягиваний.

7. Отсортируйте состав, вагоны которого идут в порядке 15, 4, 12, 7, 11, 9, 8, 10, 13, 5, 1, 6, 3, 2, 14, на горке с двумя стеками ($k = 2$). Сколько шагов вам понадобится для этого? А сколько вытягиваний?

Как вы уже поняли, мы разделили каждую задачу о сортировке на две:

(1) первая — это задача о сортировке за наименьшее число шагов,

(2) вторая — это задача о сортировке за наименьшее число вытягиваний, ведь именно вытягивание — та реальная операция, которую приходится проделывать машинисту маневрового локомотива.

Задачи

8. Попробуйте отсортировать состав 1, 11, 12, 5, 13, 10, 2, 4, 9, 7, 6, 14, 3, 8, 15 на горке, имеющей 3 стека. В каком из ваших вариантов число вытягиваний минимально?

9. а) Придумайте алгоритм сортировки, который каждый состав из n вагонов на горке с k стеками сортирует за число шагов s, где $k^{s-1} < n \le k^s$.

б) Докажите, что ваш алгоритм правильно сортирует любой состав.

в) Докажите, что существует состав из n вагонов, который нельзя отсортировать за меньшее число шагов.

Приступим к решению первой задачи.

О системах счисления

Прежде чем описать алгоритмы сортировок составов, вспомним системы счисления. Мы с детства привыкаем к тому, что любое число можно записать с помощью девяти цифр:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, 9.$$

Значение каждой цифры зависит от того места, на котором эта цифра стоит. Например, число 905, записанное цифрами 9, 0, 5, равно $9\cdot10^2+0\cdot10+5$, число $\overline{590} = 5\cdot10^2 + 9\cdot10 + 0$, а число $\overline{abcd} = a\cdot10^3 + b\cdot10^2 + c\cdot10 + d$ (обычно над набором цифр сверху ставят черту, для того чтобы не спутать десятичную запись числа с произведением его цифр).

Число 10, лежащее в основании нашей системы счисления, можно заменить на любое другое число, например на 2. В этой системе счисления всего две цифры — 0 и 1. Для того чтобы записать число в двоичной системе, его нужно представить в виде суммы степеней двойки. Например, $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 2^2$, $5 = 4 + 1$, и т.д. Если $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots$, то его двоичной записью будет набор из нулей и единиц, в котором единицы стоят на n_i-х местах, считая справа, а на остальных местах стоят нули. Например, $13 = 8+4+1$, следовательно, $13 = 1101_2$.

Вместо числа 2 в основу системы счисления можно положить произвольное натуральное число q. Такая система называется q-ичной (2-ичная, 3-ичная, ..., 10-тичная, и т.д.). В ней для записи чисел используется q цифр: 0, 1, 2, ..., $q-2$, $q-1$. q-ичной записью числа $m = a_n q^n + \ldots + a_1 q + a_0$, где все a_i — цифры q-ичной системы $(0 \le a_i \le q-1)$, служит запись $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_q$ (индекс q внизу показывает основание системы счисления; он не пишется, если понятно, о какой системе идет речь). Например, $25_{10} = 221_3$, или $1996_{10} = 5551_7$, или $111111_{10} = B207_{16}$.

Последняя, шестнадцатеричная система счисления широко распространена в программировании (запись адресов в современных компьютерах в 2-ичной системе слишком длинна). В ней используется 16 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $A(=10)$, $B(=11)$, $C(=12)$, $D(=13)$, $E(=14)$, $F(=15)$.

Теперь сформулируем алгоритм поразрядной сортировки. Мы сформулируем его для сортировочной горки с двумя стеками, но он естественно обобщается на произвольные k.

Замечание 1. Число 0 в системах счисления во всех разрядах имеет одни нули. Будем поэтому нумерацию вагонов начинать с 0.

Алгоритм поразрядной сортировки

(1) Напишем номера наших вагонов в 2-ичной системе счисления, начиная с 0. Нумерация разрядов: от младшего, нулевого разряда единиц к старшему.

(2) Дадим стекам номера 0 и 1.

(3) Сортировка начинается с нулевого шага. k-й шаг сортировки состоит в следующем: при роспуске состава вагоны, номера которых в k-м

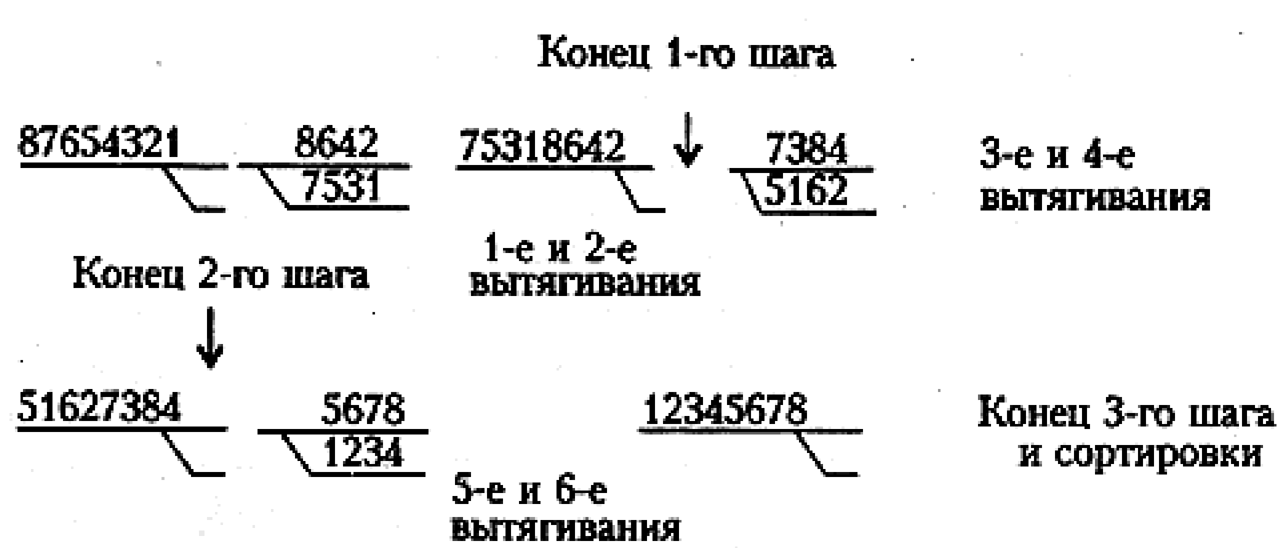

Рис. 6.