Как доказать неравенство

А. ЯРСКИЙ

ПРИМЕНЯЕМЫЕ для доказательства неравенств идеи почти столь же разнообразны, как и сами неравенства. По этой причине доказательство неравенств нередко относят к области искусства. Однако уверенное владение «школьными» методами исследования функций позволяет находить доказательства весьма обширного класса неравенств.

Начнем с неравенства, содержащего только одну переменную.

Пример 1. *Докажите, что при* $|x| \le 1$ *и* $n \in \mathbf{N}$ *выполнено неравенство*

$$1 + \frac{x}{n} - x^2 \le (1+x)^{1/n}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = (1+x)^{1/n} + x^2 - \frac{x}{n} - 1.$$

При таком выборе $f(x)$ неравенство можно записать в виде

$$f(x) \ge 0.$$

Для исследования $f(x)$ вычислим производные

$$f'(x) = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1} + 2x - \frac{1}{n},$$

$$f''(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)(1+x)^{\frac{1}{n}-2} + 2.$$

Несложно исследовать знак второй производной $f''(x)$:

$$f''(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge x_0 = \left(\frac{n-1}{2n^2}\right)^{\frac{n}{2n-1}} - 1.$$

Итак, $f''(x)$ отрицательна при $x < x_0$ и положительна при $x > x_0$. Из этого следует, что $f'(x)$ убывает при $x \le x_0$ и возрастает при $x \ge x_0$.

Займемся исследованием знака первой производной $f'(x)$. Для точки x_0 имеет место неравенство $-1 < x_0 < 0$ (проверьте самостоятельно). И так как $f'(x)$ возрастает при $x > x_0$, то $f'(x) > f'(0) = 0$ при $x > 0$ и $f'(x) < f'(0) = 0$ при $x_0 < x < 0$. При $-1 < x < x_0$ же $f'(x)$ убывает и, следовательно, может иметь еще одну точку смены знака $x_1 \in (-1; x_0)$ (нарисуйте эскиз графика $f'(x)$ в соответствии с полученными результатами). Теперь мы готовы рассмотреть знак исходной функции $f(x)$. При $x \ge 0$ функция $f(x)$ возрастает. Так как $f(0) = 0$, то $f(x) > f(0) = 0$ при $x > 0$. При $x_1 < x \le 0$ функция $f(x)$ убывает. Следовательно, $f(x) > f(0) = 0$ при $x_1 < x < 0$. Если $x_1 \le -1$ (или если такой точки x_1 вообще не существует), то неравенство $f(x) \ge 0$ установлено на всем интересующем нас отрезке $|x| \le 1$. Если же $x_1 > -1$ (в действительности именно этот случай имеет место), то на промежуток $-1 \le x < x_1$ функция $f(x)$ возрастает. Следовательно, $f(x) > f(-1) = 1/n > 0$ при $-1 < x < x_1$. Неравенство доказано.

Неравенство с двумя переменными во многих случаях удается свести к неравенству с одной переменной.

Пример 2 (XII Всероссийская олимпиада). *Докажите неравенство*

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2},$$

$$a, b > 0, \quad a \ne b.$$

Доказательство. В силу симметрии неравенства можно считать $a > b$. Разделив все части на b ($b > 0$), приведем неравенство к виду

$$\sqrt{\frac{a}{b}} < \frac{\frac{a}{b} - 1}{\ln\frac{a}{b}} < \frac{\frac{a}{b} + 1}{2}.$$

Положив $\sqrt{\frac{a}{b}} = x > 1$, получим

$$x < \frac{x^2 - 1}{\ln x} < \frac{x^2 + 1}{2}.$$

Докажем сначала первое неравенство. При $x > 1$ имеем $\ln x > 0$, и можно домножить обе части неравенства на $\ln x$:

$$2x\ln x < x^2 - 1 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2x\ln x - 1 > 0.$$

Исследуем функцию $f(x)$:

$$f'(x) = 2(x - \ln x - 1);$$

$$f''(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \ge 0 \quad (\text{при } x \ge 1).$$

Последнее означает, что $f'(x)$ возрастает при $x \ge 1$. Кроме того, $f'(1) = 0$. Следовательно, при $x > 1$ выполнено неравенство $f'(x) > f'(1) = 0$. Обнаруженная неотрицательность производной означает, в свою очередь, что функция $f(x)$ возрастает на том же промежутке $x \ge 1$. И так как $f(1) = 0$, то $f(x)$ положительна при $x > 1$, что и требуется.

При $x > 1$ второе неравенство можно переписать в виде

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < \ln x \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2 + 1} < \ln x.$$

Рассмотрим функцию $g(x) = \ln x + \frac{2}{x^2 + 1}$. Ее производную можно привести к виду

$$g'(x) = \frac{\left(x^2 - 1\right)^2}{x\left(x^2 + 1\right)^2} \ge 0; \ g(1) = 1 > 0.$$

Рассуждая аналогично первому случаю, завершим доказательство неравенства.

В рассмотренном примере 2 задача легко свелась к исследованию функций одной переменной. В следующем примере нам придется терпеливо уменьшать число неизвестных, сначала до двух, и лишь потом — свести задачу к исследованию функции одной переменной.

Пример 3 (Ленинградская городская олимпиада, 1989 г.). *Докажите неравенство*

$$2\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - \left(x^2y + y^2z + z^2x\right) \le 3,$$

$$x, y, z \in [0; 1].$$

Доказательство. Перепишем неравенство в виде

$$f(x) = 2x^3 - yx^2 - z^2x + 2\left(y^3 + z^3\right) - y^2z \le 3$$

и исследуем функцию $f(x)$. Продифференцируем:

$$f'(x) = 6x^2 - 2yx - z^2.$$

Исследуем знак $f'(x)$. Графиком $f'(x)$ является парабола с направленными вверх ветвями, пересекающая ось абсцисс в точках

$$x_1 = \frac{1}{6}\left(y - \sqrt{y^2 + 6z^2}\right),$$

$$x_2 = \frac{1}{6}\left(y + \sqrt{y^2 + 6z^2}\right).$$

Видно, что $x_1 \le 0$, т.е. x_1 не попадает на интервал $(0; 1)$. При проходе через точку x_2 знак $f'(x)$ меняется с «−» на «+», тем самым x_2 — точка минимума.

Если теперь $x_2 \in [0; 1]$, то

$$f(x_2) < f(1),\ f(x_2) < f(0).$$

В противном случае функция $f(x)$ монотонна на отрезке [0; 1]. Следовательно, в обоих случаях максимум исходной функции $f(x)$ достигается на одном из концов отрезка [0; 1], т.е. совпадает с одним из чисел $f(0)$ или $f(1)$. Вычислим значения на концах отрезка:

$$f(0) = 2(y^3 + z^3) - y^2 z \le 2(y^3 + z^3) - y^2 z + \\ +(2 - y - z^2) = f(1)$$

(так как $y, z \in [0; 1]$, то $2 - y - z^2 \ge 0$). Итак, осталось доказать, что $f(1) \le 3$. Последнее неравенство можно записать в виде

$$g(y) = 2(y^3 + z^3) - y^2 z + (2 - y - z^2) \le 3.$$

Точно так же, как при исследовании функции $f(x)$, найдя производную

$$g'(y) = 6y^2 - 2zy - 1$$

и отыскав ее корни

$$y_1 = \frac{1}{6}\left(z - \sqrt{z^2 + 6}\right) < 0,$$

$$y_2 = \frac{1}{6}\left(z + \sqrt{z^2 + 6}\right),$$

получим, что y_2 — точка минимума. Поэтому $g(y_2) < g(0)$, $g(y_2) < g(1)$ и, как и выше, $g(y)$ достигает наибольшего значения на одном из концов отрезка [0; 1]:

$$g(0) = 2z^3 + 2 - z^2 \le \\ \le 2z^3 + 2 - z^2 + (1 - z) = g(1).$$

Остается показать, что при $z \in [0; 1]$

$$g(1) = 2z^3 - z^2 - z + 3 \le 3.$$

Последнее следует из очевидного при $z \in [0; 1]$ неравенства

$$g(1) - 3 = z(z-1)(2z+1) \le 0.$$

Неравенство доказано.

Одним из наиболее интересных классов задач является доказательство геометрических неравенств.

Пример 4. *Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что*

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc \ge \\ \ge a^3 + b^3 + c^3.$$

Доказательство. Так как a, b, c — стороны треугольника, то $c < a + b$. Заметим, кроме того, что неравенство не меняется при любой перестановке переменных. Это дает возможность считать

$$0 < a \le b \le c < a + b. \qquad (*)$$

Перепишем исходное неравенство в виде

$$f(c) = c^3 - c^2(a+b) - c(a^2 + b^2 - 2ab) + \\ + a^3 + b^3 - a^2 b - ab^2 \le 0.$$

Исследуем поведение функции $f(c)$ на промежутке $b \le c < a + b$. Сначала вычислим значения функции $f(c)$ на концах отрезка:

$$f(a+b) = 0;\ f(b) = a^2(a - 2b).$$

Так как $0 < a \le b$ (неравенство (*)), то $a - 2b < 0$ и $f(b) < 0$.

Теперь вычислим производную

$$f'(c) = 3c^2 - 2c(a+b) - (a-b)^2$$

и посмотрим, при каких значениях переменной $f'(c) = 0$:

$$c = \left(a + b \pm \sqrt{(a+b)^2 + 3(a-b)^2}\right)\Big/3.$$

На интересующий нас отрезок $[b; a+b]$ попадает (проверьте!) только больший корень

$$c_0 = \left(a + b + 2\sqrt{a^2 + b^2 - ab}\right)\Big/3.$$

При проходе через точку c_0 знак производной меняется с «−» на «+». Следовательно, функция $f(c)$ сначала убывает на отрезке $[b; c_0]$, а затем возрастает на отрезке $[c_0; a + b]$. (Нарисуйте эскиз графика функции $f(c)$ в соответствии с изученным поведением производной.) Поэтому наибольшее значение этой функции достигается на правом конце $a + b$ отрезка:

$$f(c) \le f(a+b) = 0.$$

Неравенство доказано.

Нередко доказательство геометрических неравенств требует аккуратного рассмотрения тригонометрических соотношений.

Пример 5. *Для углов α, β, γ треугольника докажите неравенство*

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le 3/2.$$

Доказательство. В силу симметрии неравенства будем считать

$$0 < \alpha \le \beta \le \gamma < \pi.$$

С учетом соотношения $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, неравенству можно придать вид

$$f(\alpha) = \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + \beta) \le 3/2.$$

Вычислим производную

$$f'(\alpha) = -\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta) = \\ = 2\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}.$$

Угол $\frac{\beta}{2}$ — острый. Следовательно, знак производной определится множителем $\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)$, имеющим единственный корень $\alpha_0 = (\pi - \beta)/2$ (α, β — острые углы). При проходе через α_0 производная меняет знак с «+» на «−». Тем самым α_0 — точка максимума функции $f(\alpha)$, и достаточно проверить неравенство в точке α_0. При $\alpha = \alpha_0$ получим

$$f(\alpha_0) = \cos\left(\frac{\pi - \beta}{2}\right) + \cos\beta - \cos\left(\frac{\pi + \beta}{2}\right) = \\ = 2\sin\frac{\beta}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

Осталось исследовать квадратный трехчлен

$$g(y) = 1 + 2y - 2y^2,$$

где $y = \sin\frac{\beta}{2}$.

Графиком $g(y)$ является парабола, вершина которой имеет координату $y = 0{,}5$. Тем самым наибольшее значение $g(y)$ равно $g(0,5) = 3/2$, что и требовалось доказать. (Заодно выяснилось, что максимум левой части неравенства достигается при $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$.)

Существует большое число технических приемов, позволяющих уменьшить число неизвестных в неравенстве или понизить степени входящих в неравенство переменных.

Пример 6. *Докажите, что при a, b, c >0 выполнено неравенство*

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2 b - ab^2 - a^2 c - \\ - ac^2 - b^2 c - bc^2 + 3abc \ge 0.$$

Доказательство. Разделив все члены на $c > 0$ и положив $\frac{a}{c} = u$, $\frac{b}{c} = v$, приведем неравенство к виду

$$u^3 + v^3 + 1 - u^2 v - uv^2 - \\ - u^2 - u - v^2 - v + 3uv \ge 0.$$

Проделаем стандартные преобразования, использующие симметрию левой части неравенства:

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) + 1 - \\ - uv(u+v) - (u+v)^2 + \\ + 2uv - (u+v) + 3uv \ge 0.$$

Введем новые неизвестные $x = u + v$, $y = uv$. Следует заметить, что

$$x > 0,\ y > 0,\ x^2 \ge 4y$$

(проверьте самостоятельно). В новых переменных неравенство примет вид

$$y(5 - 4x) + (x^3 - x^2 - x + 1) \ge 0,$$

$$0 \le y \le x^2/4.$$

Итак, в результате преобразований уменьшилось число неизвестных и, кроме того, степень неизвестной y оказалась равной единице. Перепишем полученное неравенство в виде

$$f(y)=(5-4x)y+\left(x^3-x^2-x+1\right)\ge 0.$$

При любом значении x графиком $f(y)$ является прямая. Следовательно, своего наименьшего на отрезке $\left[0,x^2/4\right]$ значения $f(y)$ достигает на одном из концов этого отрезка. Несложные вычисления

$$f(0)=(x-1)^2(x+1)\ge 0,$$

$$4f\left(x^2/4\right)=(x-2)^2\ge 0$$

завершают доказательство неравенства.

Предлагаемая техника может быть применена и для доказательства неравенств с неопределенным числом переменных.

Пример 7. *При* $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\in[0;1]$ *докажите неравенство*

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n+1)^2\ge$$
$$\ge 4\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right).$$

Доказательство. Сначала сосредоточимся на переменной x_n. Обозначим

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}=a\ge 0,$$

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2=b\ge 0.$$

Исходное неравенство можно теперь переписать в виде

$$f(x_n)=4\left(x_n^2+b^2\right)-(x_n+a+1)^2\le 0.$$

Графиком $f(x_n)$ является парабола с направленными вверх ветвями. Поэтому для выполнения неравенства при $x_n\in[0;1]$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x_n)$ обладала свойством

$$\begin{cases} f(0)\le 0;\\ f(1)\le 0.\end{cases}$$

Иными словами, достаточно установить справедливость двух неравенств, получаемых из исходного при $x_n=0$ и $x_n=1$.

Повторив применительно к каждому из этих двух неравенств те же рассуждения, получим аналогичный результат: достаточно установить справедливость каждого из двух неравенств при $x_{n-1}=0$ и $x_{n-1}=1$. Продолжая аналогично, получим, что достаточно установить справедливость всех 2^n неравенств, получаемых из исходного при части (возможно — пустой) переменных равных нулю и остальных — единице. В силу симметрии исходного неравенства достаточно положить

$$x_1=x_2=\ldots=x_k=1,$$

$$x_{k+1}=x_{k+2}=\ldots=x_n=0,$$

$$0\le k\le n.$$

При таких значениях переменных исходное неравенство примет вид

$$(k+1)^2\ge 4k\Leftrightarrow (k-1)^2\ge 0.$$

Неравенство доказано.

В заключение приведем пример одного курьезного рассуждения.

Пример 8. *Докажите неравенство*

$$a^2-3ab+2b^2+a-2b+3\ge 0.$$

«Доказательство». Перепишем неравенство в виде

$$f(a)=a^2-3ab+b^2+a-2b+3\ge 0$$

и вычислим производную

$$f'(a)=2a-3b+1.$$

Так как графиком $f(a)$ является парабола с направленными вверх ветвями, то достаточно доказать неравенство при условии обращения вычисленной производной в ноль:

$$f'(a)=2a-3b+1=0.$$

Аналогично, исходное неравенство можно записать в виде

$$g(b)=a^2-3ab+2b^2+a-2b+3\ge 0.$$

Вычислив производную

$$g'(b)=-3a+4b-2,$$

получим, как и выше, что достаточно доказать неравенство при условии обращения вычисленной производной в ноль:

$$g'(b)=-3a+4b-2=0.$$

Несложно проверить, что существует единственная точка $a=-2$, $b=-1$, в которой выполнены оба условия $f'(a)=0$ и $g'(b)=0$. При таких a и b исходное неравенство действительно выполнено, что и требовалось доказать… Но столь же легко проверить, что, например, при $a=b=4$ исходное неравенство не выполняется.

Найдите ошибку в проведенном рассуждении и постарайтесь ее не повторять!

Упражнения

1. Докажите, что при $|x|<1$ для натурального $n\ge 2$ выполнено неравенство

$$(1-x)^n+(1+x)^n\le 2^n.$$

2. Докажите, что при $|x|\le 1$ и $n\in N$ выполнено неравенство

$$(1+x)^{1/n}\le 1+\frac{x}{n}.$$

3. Докажите неравенство

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\le\frac{a^n+b^n}{2};\ a,b>0;\ n\in\boldsymbol{N}.$$

4. Докажите, что

$$8\left(a^4+b^4\right)\ge(a+b)^4.$$

5. Докажите неравенство Гельдера

$$x^{1/p}y^{1/q}\le\frac{x}{p}+\frac{y}{q},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p>1,\ x,y>0.$$

6. Для неотрицательных значений переменных докажите неравенства

а) $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 9abc$;

б) $(a+b)(a+c)(b+c)\ge 8abc$;

в) $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+$
$+ac(a+c-2b)\ge 0$;

г) $3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge(a+b+c)(ab+ac+bc)$;

д) $3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$;

е) $(a+b+c)^3-4(a+b+c)(ab+ac+bc)+$
$+9abc\ge 0$;

ж) $(ab+ac+bc)^2\ge 3abc(a+b+c)$;

з) $a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+$
$+c^2(a+b-c)\le 3abc$.

7. Для $x,y,z\in(0;1)$ докажите неравенство

$$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1.$$

8 (XV Всероссийская олимпиада). При $a,b,c\ge 0$ и $a+b+c\le 3$ докажите неравенство

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\le\frac{3}{2}\le$$
$$\le\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}.$$

9 (XLVI Московская олимпиада). При $x>\sqrt{2}$ и $y>\sqrt{2}$ докажите неравенство

$$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4>x^2+y^2.$$

10. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите:

а) $2(ab+ac+bc)>a^2+b^2+c^2$;

б) $\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)>2\left(a^3+b^3+c^3\right)$;

в) $3(ab+ac+bc)\le(a+b+c)^2<$
$<4(ab+ac+bc)$;

г) $a^3+b^3+c^3+3abc\ge 2(a+b)c^2$.

11. Пусть a, b, c и S — соответственно стороны и площадь произвольного треугольника. Докажите, что для любого $x\ne 0$ выполнено неравенство

$$(2x-1)a^2+\left(\frac{2}{x}-1\right)b^2+c^2\ge 4S\sqrt{3}.$$

12. Для углов α, β, γ треугольника докажите неравенство

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\ge 3/4.$$

13. Для углов α, β, γ нетупоугольного треугольника докажите неравенство

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma<\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma.$$

14. Докажите, что при x_1, x_2, …, $x_n\in[a;b]$ выполнено неравенство

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(x_1^{-1}+x_2^{-1}+\ldots+x_n^{-1}\right)\le$$
$$\le\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2,\ 0<a<b.$$

15. Пусть a — наибольшее из неотрицательных чисел a_1, a_2, …, a_n. Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}-\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2\le\frac{a^2}{4}.$$