

Теплоемкость идеального газа

А. ШЕРОНОВ

ИЗМЕНЕНИЕ температуры физического объекта (твердого тела, жидкости, газа и т.п.) в процессе подвода или отвода тепла характеризуется теплоемкостью данного тела. Величина теплоемкости может при этом зависеть от температуры тела, объема, от агрегатного состояния, а в ходе процесса теплопередачи теплоемкость может даже менять знак. Поэтому величина теплоемкости C определяется отношением количества теплоты Q , подведенного к телу (или отведенного от него) при бесконечно малом изменении ΔT его температуры, к этому изменению:

$$Q = C\Delta T.$$

Первое начало термодинамики позволяет записать это соотношение в виде

$$C\Delta T = \Delta U + p\Delta V,$$

где ΔU — изменение внутренней энергии тела, а $p\Delta V$ (p — давление, ΔV — малое изменение объема) — работа, совершенная телом при подводе к нему количества теплоты Q .

В природе и в технических устройствах довольно часто встречаются процессы, в ходе которых теплоемкость остается постоянной величиной (такие процессы называются политропическими). Так например, в изотермическом процессе температура не меняется ($\Delta T = 0$), а тепло подводится ($Q \neq 0$), поэтому теплоемкость бесконечно большая величина. В адиабатическом процессе $Q = 0$, а $\Delta T \neq 0$, поэтому теплоемкость равна нулю. В изохорическом процессе $\Delta V = 0$, т.е. работа не совершается, и теплоемкость при постоянном объеме C_V характеризует изменение внутренней энергии тела. Для одноатомного идеального газа подвод тепла увеличивает кинетическую энергию хаотического движения его атомов. Изменение внутренней энергии при этом составляет $\Delta U = C_V\Delta T$, а соответствующая молярная теплоемкость равна $C_V = 3/2R$, где R — универсальная газовая постоянная. Для двухатомного идеального газа изменяется также энергия вращательного движения молекул, что приводит к увеличению теплоемкости

— молярная теплоемкость равна $C_V = 5/2R$. В случае твердых кристаллических тел (металлы, диэлектрики, полупроводники) изменяется энергия колебательного движения (кинетическая и потенциальная) атомов относительно их равновесных положений в кристаллической структуре. Для большинства твердых тел при комнатной температуре ($T \approx 300$ К) молярная теплоемкость близка к $3R$.

Заметим, что теплоемкость, приводимая в справочниках, обычно измерена в изобарическом процессе, т.е. при постоянном внешнем давлении. Подведенное тепло в этом случае идет на изменение внутренней энергии ΔU и совершение работы $p\Delta V$. Для твердых тел и жидкостей изменение внутренней энергии намного больше, чем совершаемая при этом работа, поэтому для твердых тел и жидкостей теплоемкости C_V (теплоемкость при постоянном объеме) и C_p (теплоемкость при постоянном давлении) мало отличаются по величине, в то время как для газов это отличие существенно.

Перейдем теперь к рассмотрению примеров использования понятия теплоемкости при решении конкретных задач.

Задача 1. В комнате объемом $V = 60$ м³ находится воздух при давлении $p = 10^5$ Па и температуре $T = 300$ К. На сколько градусов изменится температура воздуха в комнате за час работы в ней нагревателя мощностью 1 кВт? Считать, что воздух прогревается равномерно и из комнаты не выходит, а передача тепла от него окружающим телам мала.

Воздух можно считать двухатомным идеальным газом с молярной теплоемкостью $C_V = 5/2R = 20,7$ Дж/моль. В комнате находится $\nu = pV/(RT)$ молей воздуха. За час работы нагревателя выделяется количество теплоты $Q = 3,6 \cdot 10^6$ Дж. Следовательно, изменение температуры составит

$$\Delta T = \frac{Q}{\nu C_V} = \frac{QRT}{C_V pV} = 70 \text{ К.}$$

Полученный результат явно превосходит реальный нагрев воздуха в ком-

нате при данной мощности нагревателя. Это означает, что передачей тепла от воздуха окружающим телам пренебречь нельзя — грубая оценка.

Задача 2. В установке для измерения теплоемкостей газов исследуемый газ под небольшим избыточным давлением прокачивается через трубку, внутри которой находится нагреватель известной мощности. Измеряется разность температур газа на входе и выходе трубки и количество газа, прошедшего через трубку в единицу времени. Считая, что все тепло, выделяемое нагревателем, передается газу, найдите величину теплоемкости, измеряемой в этом опыте. На сколько измеренная теплоемкость отличается от теплоемкости при постоянном объеме?

Пусть в стационарном режиме в единицу времени на вход в трубку поступает 1 моль газа. Обозначим давление газа на входе через p_1 , а температуру через T_1 . Работа, совершенная компрессором над газом, будет равна $p_1V_1 = RT_1$. На выходе эта порция газа совершит работу против внешнего давления, равную $p_2V_2 = RT_2$, где p_2 — внешнее давление, а T_2 — температура газа на выходе. Используя первое начало термодинамики, можно записать

$$Q = C_V(T_2 - T_1) + p_1V_1 - p_2V_2 = C_V\Delta T + R\Delta T = C_p\Delta T,$$

где Q — подведенное к 1 молю газа количество теплоты. Мы получили, что в данном опыте измеряется теплоемкость при постоянном давлении, которая отличается от теплоемкости при постоянном объеме на R .

При решении мы нигде не использовали малость разности давлений на концах трубки. Значит ли это, что полученный результат будет справедливым и при больших перепадах давления? Нет, не значит, поскольку в этом случае при написании энергетического баланса мы не можем пренебрегать кинетической энергией поступательного движения газа.

Задача 3. Моль гелия сжимают в процессе с постоянным давлением 1—2 (рис. 1) так, что $T_1 = 8T_2$. Затем газ расширяется в процессе 2—3 с постоянной теплоемкостью до первоначального объема. Найдите эту теплоемкость, если конечная температура T_3 в 16 раз меньше начальной T_1 , а работа по сжатию в 14/3 раза больше работы по расширению.

Работа по сжатию равна

$$A_{12} = p_1(V_1 - V_2) = R(T_1 - T_2) = 7RT_2.$$

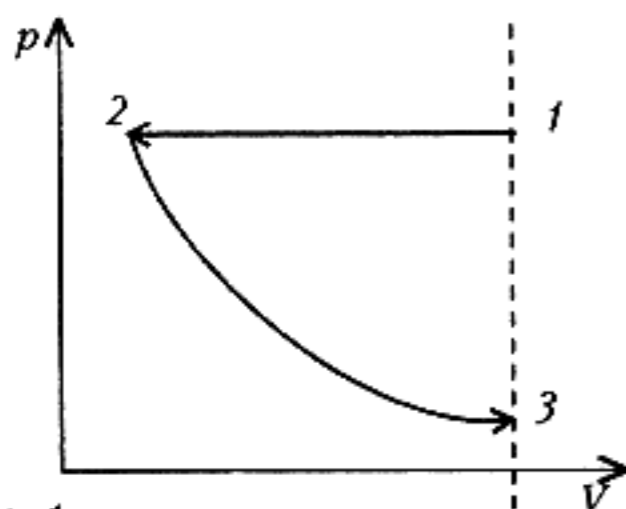


Рис. 1

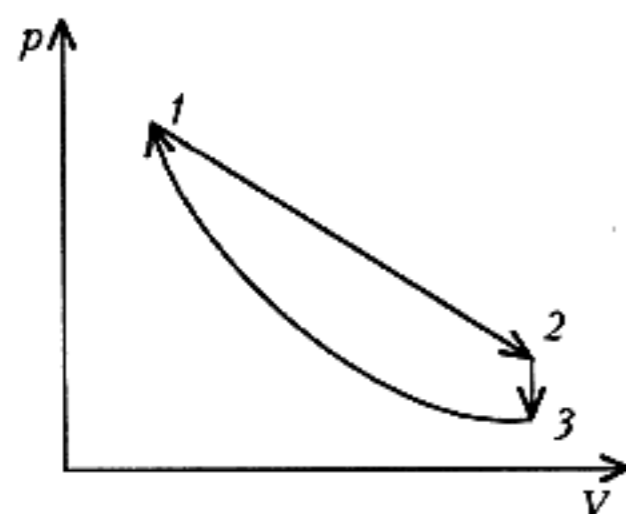


Рис. 2

В соответствии с законом сохранения энергии, работа по расширению равна

$$A_{23} = Q_{23} - \Delta U_{23} = (C - C_V)(T_3 - T_2) = -\frac{(C - C_V)T_2}{2}.$$

По условию задачи

$$A_{12} = \frac{14A_{23}}{3}.$$

Отсюда следует, что

$$C = C_V - 3R = -C_V = -\frac{3}{2}R.$$

Величина теплоемкости получилась отрицательной, так как тепло к газу на участке 2-3 подводится, а его температура уменьшается. Иными словами, газ в этом процессе совершает работу за счет подведенного тепла и уменьшения собственной внутренней энергии.

Задача 4. Найдите величину теплоемкости и работу, которую совершает моль гелия в процессе расширения $p^2V = \text{const}$. Начальная температура газа T_1 , а конечная T_2 .

Приращения давления Δp , объема ΔV и температуры ΔT связаны уравнением процесса:

$$(p + \Delta p)^2(V + \Delta V) = p^2V$$

и уравнением состояния:

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = R(T + \Delta T).$$

Раскрыв скобки и пренебрегая малыми величинами $2p\Delta p\Delta V$, Δp^2V , $\Delta p^2\Delta V$ и $\Delta p\Delta V$, получим

$$p\Delta V = 2R\Delta T.$$

По определению теплоемкости имеем

$$C\Delta T = C_V\Delta T + p\Delta V = (C_V + 2R)\Delta T,$$

следовательно, теплоемкость в данном процессе равна

$$C = C_V + 2R = 3,5R.$$

В соответствии с законом сохранения энергии, работа, совершенная газом, составляет

$$A = Q - \Delta U = (C - C_V)(T_2 - T_1) = 2R(T_2 - T_1).$$

Задача 5. Моль гелия в замкнутом цикле (рис.2) совершает работу $A = 2026$ Дж. Цикл состоит из процесса 1-2, в котором давление является линейной функцией объема, изохоры 2-3 и процесса 3-1, в котором теплоемкость газа остается постоянной. Найдите величину этой теплоемкости, если известно что $T_1 = T_2 = 2T_3 = 100$ К, а $V_2/V_1 = \alpha = 8$.

Работа газа в процессе расширения равна

$$A_{12} = \frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{RT_1(\alpha^2 - 1)}{2\alpha}.$$

В процессе с постоянной теплоемкостью C по закону сохранения энергии работа газа равна

$$A_{31} = (C - C_V)(T_1 - T_3).$$

По условию работа в цикле составляет

$$A = A_{12} + A_{31}.$$

Откуда находим

$$C = C_V + \frac{A - RT_1(\alpha^2 - 1)/(2\alpha)}{T_1 - T_3} = -12,4 \text{ Дж/К}.$$

Теплоемкость получилась отрицательной, так как температура газа в этом процессе растет, а тепло отводится. Иными словами, часть работы по сжатию увеличивает внутреннюю энергию газа, а другая часть отводится в виде тепла.

Задача 6. Замкнутый цилиндрический сосуд делится подвижным невесомым поршнем на две части (рис.3). В нижней части цилиндра находится моль одноатомного идеального газа, а в верхней части вакуум. Поршень связан с дном сосуда упругой пружиной.

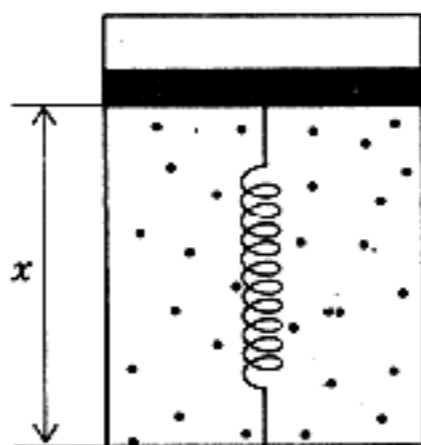


Рис. 3

Найдите теплоемкость газа, находящегося в сосуде. Нерастянутая пружина соответствует положению поршня у дна сосуда.

Пусть в начальном положении поршень находится на расстоянии x от дна сосуда, жесткость пружины k и площадь сечения сосуда S . Тогда объем, занимаемый газом, равен $V = xS$, а давление газа равно $p = (kx)/S$. При подведении к газу количества теплоты $Q = C\Delta T$ газ нагревается на ΔT , а поршень перемещается на Δx . Работа газа при этом идет на увеличение потенциальной энергии растянутой пружины. По закону сохранения энергии,

$$C\Delta T = C_V\Delta T + p\Delta V = C_V\Delta T + kx\Delta x.$$

Из уравнения состояния $pV = kx^2 = RT$ имеем

$$2kx\Delta x = R\Delta T.$$

Таким образом, для теплоемкости C газа получаем

$$C = C_V + \frac{R}{2} = 2R.$$

Упражнения

1. Монохроматическое излучение с длиной волны $\lambda = 5,1 \cdot 10^{-7}$ м с большой вероятностью поглощается молекулой хлора, что приводит к ее диссоциации, т.е. распаду на атомы. Определите давление в сосуде с молекулярным хлором сразу после облучения коротким импульсом света с энергией 1 Дж, пренебрегая теплообменом газа со стенками сосуда. Считать, что 90% энергии импульса идет на диссоциацию, а 10% поглощается, приводя к нагреву смеси молекулярного и атомарного хлора. Перед облучением молекулярный хлор занимал объем $22,4$ см³ при температуре 273 К и давлении 10^5 Па.

2. Покажите, что в процессе, имеющим на pV -диаграмме идеального газа вид прямой, проходящей через начало координат, теплоемкость остается постоянной. Найдите величину этой теплоемкости для одного моля газа.

3. Моль гелия расширяется в процессе $pV^2 = \text{const}$. Найдите работу, произведенную газом, если его начальная температура T_1 , а конечная T_2 .

4. Цилиндрический сосуд делится подвижным и непроводящим тепло поршнем на две части, в которых находится по одному молю гелия. Температура газа в одной части сосуда поддерживается постоянной. Найдите зависимость теплоемкости газа, находящегося в другой части сосуда, от ее объема V . Объем всего сосуда равен V_0 .

5. Моль гелия заперт невесомым поршнем и пружиной в сосуде (см. рис.3). Сила упругости пружины F зависит от ее длины x по закону $F = kx^\alpha$, где k и α — некоторые константы. Определите величину константы α , если известно, что молярная теплоемкость газа в этих условиях равна $1,9R$.