Как один младший школьник всю семью озадачил

В.РАДЧЕНКО

ОДНАЖДЫ Ваня, младший брат Пети, листал его журналы «Квант» и неожиданно обнаружил интересные задачи в разделе «Квант» для младших школьников». Особенно ему понравилась задача про пиратов.

Задача 1 («Квант» №8 за 1991 г.).

За десять дней пират Ерема
Способен выпить бочку рома,
А у пирата у Емели
Ушло б на это две недели.
За сколько дней прикончат ром
Пираты, действуя вдвоем?

Как ни пытался Ваня ее решить, ничего у него не получалось. Особенно обидно было, что задача-то для младших школьников, значит, как раз для него. Пришлось обратиться за помощью к Пете. Петя стал писать какие-то x и y, исчеркал целую страницу, но так ничего и не решил. Сказал, что ему некогда заниматься всякой ерундой, и ушел на баскетбольную секцию. В скором времени вернулся домой самый старший брат Николай, студент и Ваня попросил помощи у него. Вот какое решение предложил Николай.

I способ (метод наименьшего общего кратного). Запишем кратко условие задачи (рис.1) и выясним, сколько рома смогли бы выпить пираты за 70 дней. Получается 12 бочек. Если за 70 дней они могут выпить 12 бочек, то с 1 бочкой справятся в 12 раз быстрее: $70 : 12 = 5\frac{5}{6}$.

Ответ: 6 дней.

Ване очень понравилось это решение, только он никак не мог понять, как это брат догадался рассмотреть именно 70 дней. Но тот объяснил, что это очень просто, нужно только подобрать такое число, которое делится и

Ерема	*10 дн.*	*1 б.*	*70 дн.*	*7 б.*	*12 б.*
Емеля	*14 дн.*	*1 б.*		*5 б.*	

Рис. 1

на 10, и на 14 (если это наименьшее из таких чисел, то оно называется *наименьшим общим кратным* и записывается так: НОК (10,14) = 70). Если вы, как и Ваня, поняли это решение, то попробуйте решить этим способом еще несколько задач.

Упражнения

1 (индусский математик XII века Бхасхара Ачарья). Из пучка цветов чистых лотосов взяты одна третья, пятая и шестая части, соответственно принесенные в жертву: Шиве, Вишну и Солнцу. Одна четверть досталась Бавани. Оставшиеся 6 лотосов даны глубокоуважаемому учителю. Сосчитай мне быстро число всех цветов.

2 (немецкий математик XVI века Адам Ризе). Трое выиграли некоторую сумму денег. На долю первого пришлась 1/4 этой суммы, на долю второго 1/7, а на долю третьего — 17 флоринов. Как велик весь выигрыш?

3 (из «Греческой антологии»).

— Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил философ. — Половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании, и, кроме того, есть еще три женщины.

Сколько учеников было в школе Пифагора?

4. В 5 классе за контрольную работу 1/7 учеников получили пятерки, 1/3 — четверки, 1/2 — тройки. Остальные работы оказались неудовлетворительными. Сколько было таких работ?

Указание. Если НОК чисел не удовлетворяет условию задачи, попытайтесь рассмотреть другие общие кратные, для чего умножьте НОК на 2, 3, 4 и т.д.

Когда вечером вернулся с работы отец, Ваня решил и ему показать эту задачу, надеясь, что тому ни за что с ней не справиться. Отец призадумался, вспоминая школьные уроки арифметики, и предложил такой способ.

II способ (арифметический). Обозначим величину бочки за 1, получим, что Ерема выпивает за день 1/10 бочки, а Емеля — 1/14 бочки. Вместе за 1 день они способны выпить $1/10 + 1/14 = 6/35$ бочки — это их общая «производительность». Тогда на всю бочку им потребуется

$$1 : 6/35 = 5\frac{5}{6},$$

т.е. 6 дней. Ване это решение тоже понравилось, хотя он очень не любил возиться с дробями.

В этот момент в комнату заглянула мама, ей было интересно, чем это так увлеклись мужчины. Мама никогда не любила всякие вычисления, поэтому ей совсем не понравились оба решения, и она предложила свое.

(Окончание см. на с.34)

Иллюстрация П.Чернского

(Начало см. на с.31)

III способ (графический). Изобразим условие задачи на рисунке (рис.2). Для этого разделим бочку

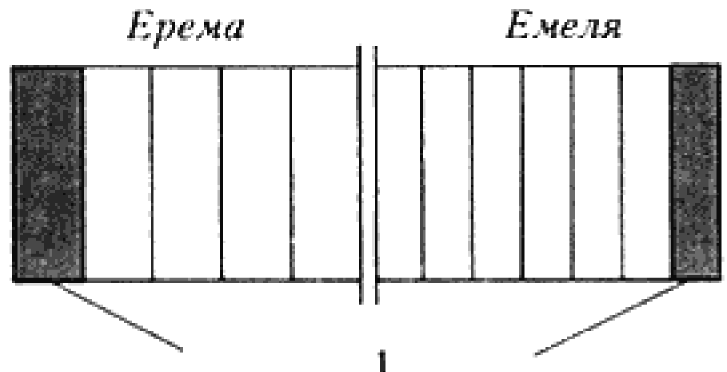

Рис.2

пополам между Еремой и Емелей, а каждую половину на дневные порции Еремы и Емели. После пяти дней половина Еремы кончится, останутся лишь две дневные порции Емели, с которыми они благополучно справятся на 6-й день.

На следующий день Ваня отыскал еще одну задачу. Как это ни странно, она оказалась почти в точности про их семью, потому всем было интересно ее решить, и каждый предлагал свой способ.

Задача 2 («Квант» №5 за 1986 г.). *У Пети три брата. Первый старше его на три года, второй моложе его на три года, третий моложе Пети втрое. Зато отец старше Пети втрое. Всем вместе 95 лет. Сколько лет каждому?*

Петя, как всегда, не мог обойтись без уравнений.

I способ (алгебраический). Если Пете x лет, то всем вместе

$$x + (x + 3) + (x - 3) + x/3 + 3x = 95 \text{ лет.}$$

Решая это уравнение, получаем, что Пете 15 лет, братьям 18, 12 и 5 лет, а отцу 45 лет.

Николай предложил такое решение.

II способ (перебор). Из условия задачи следует, что возраст отца выражается числом, которое делится на 9. Составим таблицу (начнем ее с 27 из соображений здравого смысла).

Отец	Петя	Братья I	Братья II	Братья III	Сумма возрастов
27	9	12	6	3	57<95
36					
45	15	18	12	5	95
54					
63					

Будем заполнять таблицу не в каждой строчке, а, например, через одну. Тогда возможны два варианта: или в какой-то момент сумма превысит число 95, значит, ответом является предыдущая строка, или же мы в точности попадем на нужную строчку. В любом случае нам потребуется меньше вычислений. В нашей задаче ответ получился со второй попытки.

Отец в этот день задержался на работе, а мама, конечно, нарисовала схему.

III способ (графический). Петин возраст — это выделенный прямоугольник на схеме (рис.3), I, II и III — возрасты его братьев. Всего получилось $6 \cdot 3 + 1 = 19$ возрастов младшего брата; значит, ему $95 : 19 = 5$ лет.

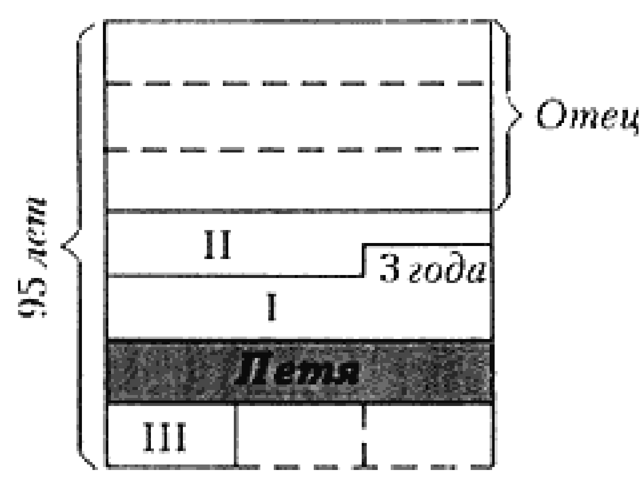

Рис.3

Дальше легко посчитать, сколько лет всем остальным.

Следующую задачу выбрал отец из своего старого учебника арифметики.

Задача 3. *У двух братьев 48 орехов, 2/3 числа орехов, имеющихся у одного из братьев, равны 2/5 числа орехов, имеющихся у другого брата. Сколько орехов у каждого брата?*

I способ (алгебраический). Петя, конечно, подошел к делу с точки зрения алгебры. Он предложил или решить уравнение

$$2/3x = 2/5 \cdot (48 - x),$$

или систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 48, \\ 2/3x = 2/5y. \end{cases}$$

Выясните, какие величины Петя принял за x и y в уравнении и в системе, а затем решите их.

Ваня ничего не понял в Петином решении, но его успокоили, что через два года и он научится так решать.

II способ (перебор). Николай по-прежнему предпочитал перебор. Вот его решение.

Число орехов у братьев неравное, у второго орехов больше (2/5 его орехов равны 2/3 количества орехов первого), т.е. у второго орехов больше чем 24. Кроме того, это число должно делиться на 5 (2/5 этого числа должны быть целым числом). Таким образом, достаточно проверить соответствие условию задачи чисел 25, 30, 35, 40, 45. Но уже на втором шаге мы получим искомое число 30, которое удовлетворяет всем условиям задачи.

III способ (графический). Однако решение, предложенное мамой, понравилось Ване больше других. Мама изобразила условие задачи графически (рис.4). Из рисунка следует, что все орехи можно представить в виде 8 равных частей, 5 из которых

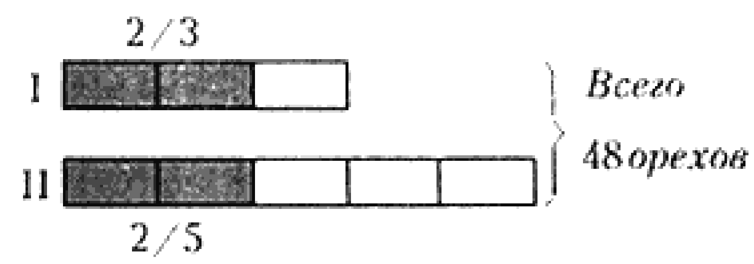

Рис.4

принадлежит второму брату, а 3 части первому. Значит, второй брат имеет $48 : 8 \cdot 5 = 30$ орехов, а первый $48 - 30 = 18$ орехов.

IV способ (арифметический). Отец предложил такое решение. Если у первого брата было a орехов, а у второго брата b орехов, то из условия задачи можно составить следующее равенство: $2/3a = 2/5b$. Из этого равенства получаем пропорцию: $b : a = 2/3 : 2/5 = = 10/6 = 5 : 3$. Таким образом, требуется разделить число 48 на две части в отношении 5 : 3. Но эта задача уже решена (способ III).

Упражнение 5. Пусть в задаче 3 общее число орехов будет 57, а 3/5 орехов первого брата равны 2/3 орехов второго. Решите видоизмененную задачу каждым из способов. Появились ли какие-то отличия в решении задачи?

Можно ли считать какой-либо из приведенных способов решения задач наилучшим? Ну, это кому что больше нравится. Но Ваня решил, что мамины картинки гораздо понятнее, чем Петина алгебра. Уж это точно!