Теорема о четырех вершинах для многоугольника

О.МУСИН

В дифференциальной геометрии широко известна теорема о четырех вершинах. Суть ее состоит в том, что у достаточно гладкой замкнутой выпуклой кривой (овала) функция кривизны имеет по крайней мере четыре экстремума (вершины), т.е. у нее не менее двух локальных максимумов и, соответственно, минимумов. Мы не будем здесь давать строгого определения понятия кривизны; если оно вам неизвестно, то вы без особого ущерба можете пропустить приведенную выше формулировку теоремы и дальнейшие ссылки на непрерывный случай. Дело в том, что, как оказалось, имеется «дискретный» аналог этой теоремы для многоугольника, который вполне понятен школьнику старших классов. Эта теорема полностью согласуется с ее непрерывным аналогом и при незначительных усилиях из теоремы о многоугольнике выводится теорема о кривой. В одном из докладов на заседании Московского математического общества академик В.И.Арнольд назвал теорему о четырех вершинах фундаментальным свойством размерности два.

Теорема о четырех экстремальных вершинах

Рассмотрим выпуклый многоугольник M с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$. У любой вершины A_i есть два соседа – A_{i-1} и A_{i+1}, если $1 < i < n$, A_2 и A_n для A_1 и, наконец, A_{n-1} и A_1 для A_n. Сопоставим каждой вершине A_i радиус окружности, описанной вокруг треугольника с вершинами A_i и двумя ее соседями. Обозначим радиус этой окружности через R_i. Мы имеем теперь набор чисел $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

Будем называть вершину A_i многоугольника M *локально-минимальной*, если значение соответствующего ей радиуса R_i не превосходит значений радиусов двух ее соседей (можно считать, что эти числа выписаны по окружности). Если величина R_i не меньше величин радиусов соседних вершин, то будем называть вершину A_i *локально-максимальной*. Вершины, являющиеся либо локально-минимальными, либо локально-максимальными, назовем *экстремальными*. Заметим, что неравенства здесь нестрогие и поэтому, согласно определению, все вершины описанного многоугольника являются экстремальными, так как у них одинаковые радиусы.

В любом наборе чисел имеется наименьшее и наибольшее число, и поэтому для любого многоугольника мы заведомо имеем две экстремальные вершины. Теорема о четырех вершинах говорит о том, что найдутся по крайней мере еще две. В непрерывном случае необходимым является условие выпуклости кривой. А что для многоугольника?

Задача 1. *Постройте пример невыпуклого многоугольника, имеющего ровно две экстремальные вершины.*

Казалось бы, что условия выпуклости достаточно для существования четырех экстремальных вершин. Однако и это не так.

Задача 2. *Постройте пример выпуклого многоугольника, у которого ровно две экстремальные вершины.*

Надеемся, что эти задачи не вызовут у вас особенных затруднений. В качестве подсказки заметим, что достаточно рассмотреть четырехугольник. Если у вас никак не выходит решение этой задачи, то посмотрите на рисунки 3 и 4, где приведены примеры для этих задач.

Возможно, у вас возник вопрос, какое отношение имеет радиус описанной окружности к кривизне? Дело в том, что кривизной вершины A_i называют величину $1/R_i$. С этой величиной связано одно из определений кривизны для гладких кривых. Если рассмотреть точку A на кривой и на маленьком расстоянии h по обе стороны от A отложить на кривой точки B и C, то *кривизной* в точке A называется предел при h стремящемся к 0 величины $1/R(h)$, где $R(h)$ – радиус описанной окружности треугольника ABC.

Заметим, что при маленьких h угол BAC близок к 180°. В частности, если кривая выпукла, то из этого следует, что центр описанной окружности лежит внутри угла BAC. Это свойство может не выполняться для многоугольника. Легко построить пример, когда центр описанной окружности треугольника ABC лежит вне угла BAC. В связи с этим дадим следующее определение вершины положительной кривизны.

Определение. *Назовем вершину A_i многоугольника M вершиной положительной кривизны, если центр описанной вокруг треугольника $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ окружности лежит внутри угла $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ (рис.1). Будем говорить, что многоугольник положительной кривизны, если все его вершины положительной кривизны.*

Нетрудно понять, что это определение согласуется с определением знака кривизны для непрерывного

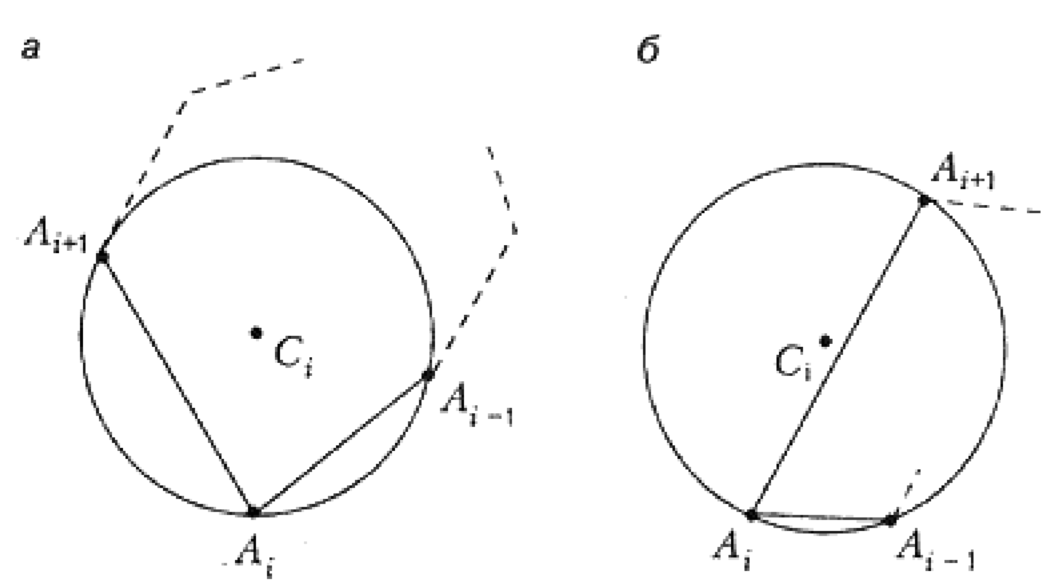

Рис. 1. а) A_i – *вершина положительной кривизны;* б) A_i *не является вершиной положительной кривизны*

Иллюстрация В.Бухарева

случая. Теперь у нас все готово, чтобы сформулировать основную теорему.

Теорема. *У всякого выпуклого n-угольника положительной кривизны по крайней мере четыре вершины являются экстремальными.* (Здесь, естественно, $n > 3$.)

Прежде чем заглянуть в доказательство основной теоремы, вы можете поразмышлять над следующими задачами, являющимися ее вариациями.

Задача 3. *Докажите, что у выпуклого равностороннего многоугольника найдется по крайней мере два угла, величина каждого из которых не превосходит величин двух его соседних углов.*

Эта задача является прямым следствием теоремы (почему?).

Следующая задача предлагалась на заключительном этапе XXI Российской математической олимпиады в1995 году. Она не выводится прямо из теоремы, но наше доказательство теоремы дословно переносится на решение задачи. Интересно, что из двух десятков школьников, решивших эту задачу (она предлагалась сразу в двух классах, в 10 и 11), только один использовал идею доказательства теоремы.

Задача 4 (А.Берзиньш, О.Мусин). *Докажите, что если у выпуклого многоугольника все углы равны, то по крайней мере у двух его сторон длины не превосходят длин соседних с ними сторон.*

Доказательство теоремы

Будем доказывать теорему от противного. Предположим, что у многоугольника M ровно две экстремальные вершины. Без ограничения общности можно считать, что это вершины A_1 и A_k. Пусть у вершины A_1 радиус минимальный, а у вершины A_k — максимальный. Тогда имеют место следующие неравенства:

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_k; \qquad (1)$$

$$R_1 < R_2 < R_{n-1} < \ldots < R_{k+1} < R_k. \quad (2)$$

Проведем к каждой из сторон многоугольника срединные перпендикуляры. Два соседних перпендикуляра, проведенные к сторонам a_{i-1} и a_i, пересекаются в точке C_i — центре описанной окружности треугольника $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ (рис.2). Из определения R_i следует, что $A_iC_i = R_i$.

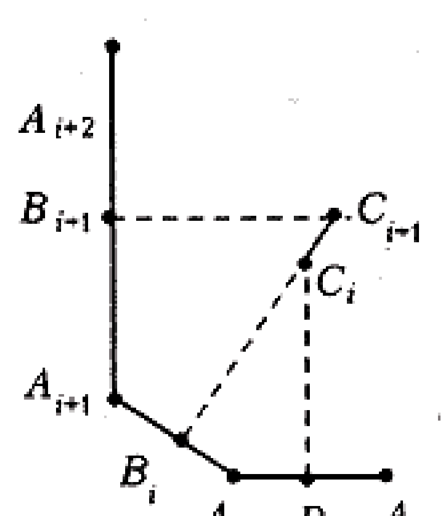

Рис. 2

Пусть B_i — середина стороны a_i, тогда $\angle B_{i-1}C_iB_i = 180° - \angle A_i$. Обозначим этот угол через β_i. Докажем, что если $R_i < R_{i+1}$, то $\angle B_{i-1}C_{i+1}B_{i+1}$ меньше $\beta_i + \beta_{i+1}$. Заметим, что $B_iC_i < B_iC_{i+1}$. (Это неравенство вытекает из того, что у прямоугольных треугольников $B_iC_iA_i$ и $B_iC_{i+1}A_{i+1}$ катеты B_iA_i и B_iA_{i+1} равны.) Поэтому угол $B_iC_iB_{i-1}$ внешний для треугольника $B_{i-1}C_iC_{i+1}$. Отсюда следует, что $\angle B_{i-1}C_{i+1}B_i < \angle B_{i-1}C_iB_i = \beta_i$ и справедливо неравенство $\angle B_{i-1}C_{i+1}B_{i+1} < \beta_i + \beta_{i+1}$.

Применим последнее неравенство к (1), т.е. последовательно рассмотрим углы $B_1C_3B_3$, $B_1C_4B_4$ и т.д.; получим, что $\angle B_1C_kB_k < \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_k$. Аналогично, используя (2), получаем, что $360° - \angle B_1C_kB_k < \beta_1 + \beta_n + \beta_{n-1} \ \ldots + \beta_{k-1}$. Сложив эти неравенства, получаем: $360° < \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 180° - \angle A_1 + 180° - \angle A_2 + \ldots + 180° - \angle A_n = 180°n - (\angle A_1 + \angle A_2 + \ldots + \angle A_n) = 180°n - 180°(n-2) = 360°$. Здесь мы воспользовались тем, что сумма углов n-угольника равна $180°(n-2)$. Следовательно, $360° < 360°$. Противоречие. Теорема доказана.

Каустика многоугольника

Доказательство теоремы позволяет рассмотреть для многоугольников один очень интересный объект, возникающий в математической теории особенностей. Для гладкой кривой *каустикой* называют множество центров кривизны. Чтобы ее построить, нужно отложить вдоль каждой нормали соответствующие радиусы кривизны. Это определение легко переносится на случай многоугольника. Будем называть каустикой n-угольника M с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ замкнутую ломаную $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n, C_1$, где C_i, как и выше, центр описанной окружности треугольника $A_{i-1}A_iA_{i+1}$.

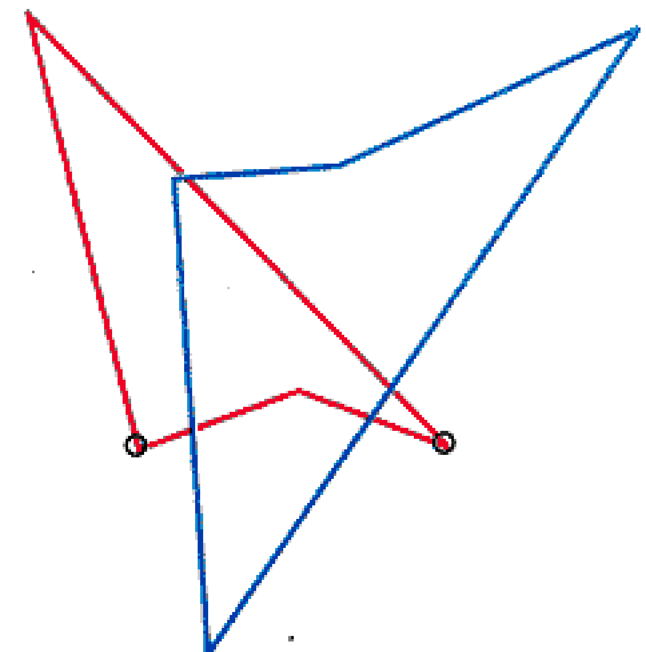

Рис. 3. Невыпуклый многоугольник с двумя экстремальными вершинами

Рис. 4. Выпуклый четырехугольник с двумя экстремальными вершинами

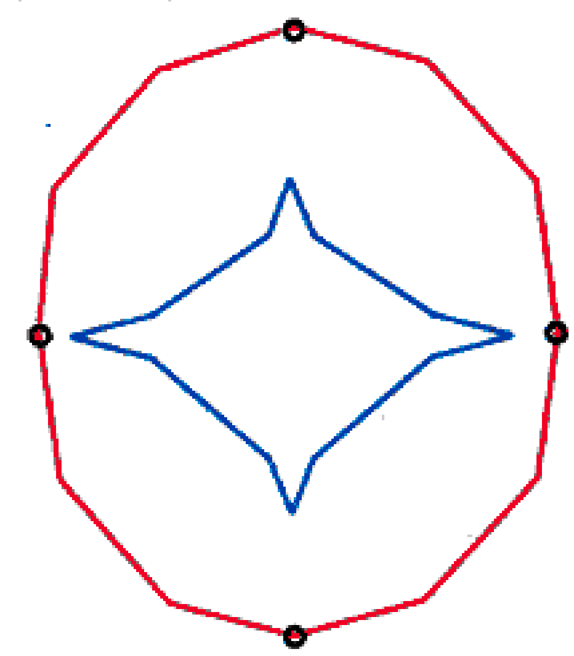

Рис. 5. 12-угольник и его каустика с 4 вершинами

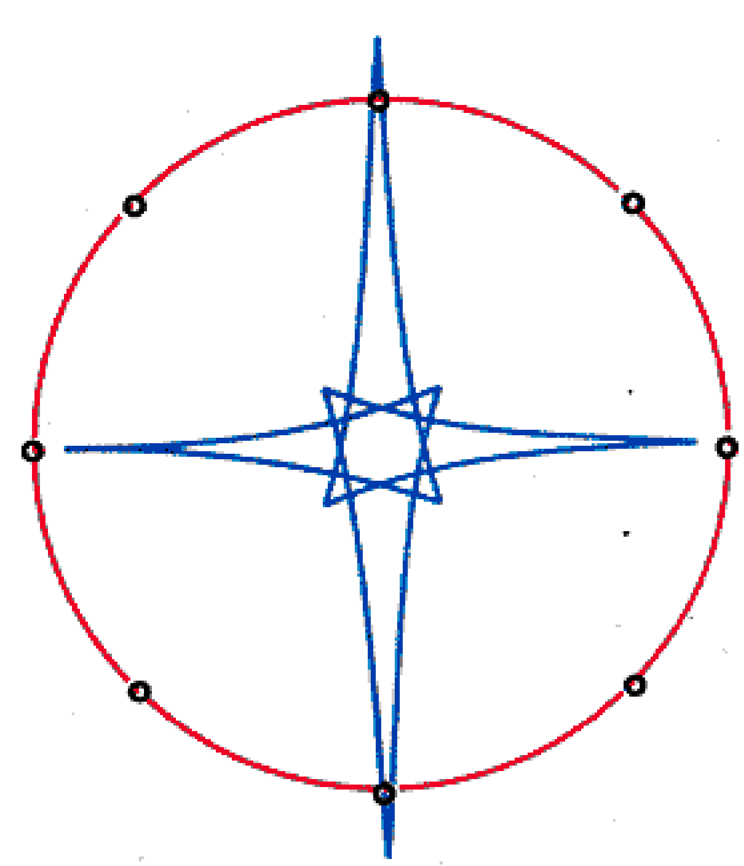

Рис. 6. 100-угольник с 8 экстремальными вершинами

На рисунках 3, 4, 5 и 6 изображены каустики многоугольников, где многоугольник показан красным цветом, а его каустика синим. (Все эти примеры построены с помощью компьютера.) Многоугольники на рисунках 3 и 4 не удовлетворяют условию теоремы, и потому у них только по две экстремальные вершины.

Рисунки 5 и 6 показывают явную связь между числом экстремальных вершин. Так, на рисунке 5 число экстремальных вершин равно 4, а каустика при обходе оборачивается один раз, а на рисунке 6 их 8, а оборотов, соответственно, 3. Конечно, эта связь не случайна. Поясним сначала, что значит «число оборотов» кривой. Это понятие, которое обычно называют *индексом*, можно определить для любой замкнутой кривой. Для замкнутой ломаной это сделать достаточно легко. Пусть $\angle C_1, \angle C_2, \ldots, \angle C_n$ — правые углы при обходе ломаной. (Можно рассматривать и левые, главное, чтобы все углы были одного типа: либо правые, либо левые). Рассмотрим сумму $(180^\circ - \angle C_1) + (180^\circ - \angle C_2) + \ldots + (180^\circ - \angle C_n)$. Эта сумма равна величине $\pm 360^\circ d$, где d — натуральное число (почему?). Число d и называют индексом замкнутой ломаной. Эта характеристика представляет самостоятельный интерес; если вы с ней незнакомы, то рекомендуем вам поэкспериментировать с ней, чтобы убедиться, что она действительно отвечает за число вращений замкнутой кривой.

Вернемся к каустике.

Задача 5. *Докажите, что индекс каустики выпуклого многоугольника положительной кривизны равен d тогда и только тогда, когда у многоугольника ровно $2d + 2$ экстремальных вершин.*

Указание. Из рисунка 2 можно углядеть, что $\angle C_i$ равен $\angle A_i$, если A_i не экстремальная вершина. Дополнительный вклад $2d + 2$ экстремальных вершин составляет $360^\circ (d - 1)$.

Обобщения теоремы о четырех вершинах

В замечательной книге известного российского математика академика А.Д.Александрова «Выпуклые многогранники», (М.: ГИТТЛ, 1950) имеется одна лемма, которая весьма близка к рассматриваемой нами теме. Мы приведем ее в несколько меньшей общности, чем в книге.

Теорема Александрова. *Пусть на плоскости даны два выпуклых многоугольника M_1 и M_2 с параллельными сторонами, которые никакими параллельными переносами не могут быть расположены так, чтобы один содержался внутри другого. Тогда при обходе M_1 или M_2 разность длин соответствующих параллельных сторон должна изменять знак по крайней мере четыре раза.*

На первый взгляд, здесь нет явной связи с теоремой о четырех вершинах для многоугольника и число 4 выглядит как совпадение. Однако посмотрите на задачу 4. Эта задача — прямое следствие теоремы Александрова. Действительно, пусть M_1 — n-угольник ($n > 3$), у которого все углы равны, а M_2 — он же, но повернутый вокруг какой-нибудь вершины M_1 на угол α, равный $180^\circ(n-2)/n$ — внутреннему углу P_1. Тогда стороны M_1 и M_2 будут параллельны, при этом соответствующие параллельные стороны являются соседними. Поскольку при сравнении длин этих сторон знак меняется по крайней мере 4 раза, то и у нашего многоугольника имеется не менее четырех экстремальных сторон.

Заметим, что результат А.Д.Александрова сильнее, чем результат задачи 4. Если повернуть M_1 вокруг вершины на угол $k\alpha$, где $1 < k < n$, то стороны M_2 также будут параллельны P_1, но уже не будут соседними. Номера параллельных сторон отличаются на k, и для них вновь выполнено условие, что разность длин этих сторон при обходе меняется не менее четырех раз. Попробуйте доказать этот результат, не используя теорему Александрова!

Имеется обобщение теоремы о четырех вершинах овала (гладкий случай), принадлежащее, видимо, известному немецкому геометру Вильгельму Бляшке (1885—1962). Мы приведем здесь формулировку этого результата, оставляя без дальнейших пояснений, что означают соответствующие математические понятия.

Пусть C_1 и C_2 — две (положительно направленные) выпуклые замкнутые кривые, $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ — элементы дуги в точках с параллельными (и одинаково направленными) опорными прямыми; тогда отношение $d\sigma_1/d\sigma_2$ имеет минимум четыре экстремума.

Эта теорема переходит в теорему о четырех вершинах овала, если C_2 — окружность.

Нетрудно заметить сходство этого утверждения с теоремой Александрова. С одной стороны, это позволяет считать теорему Александрова вариантом теоремы о четырех вершинах для многоугольника (обобщением задачи 4), а с другой, позволяет надеется, что имеются и другие обобщения для многоугольников, более близкие к нашей основной теореме. Может быть, кому-то из читателей удастся их найти?

В заключение остановимся еще на одном обобщении теоремы о четырех вершинах овала, которое упоминается в книге В.Бляшке «Круг и шар» (М.: Наука, 1967, с.193—194): *«Если овал пересекается с кругом в 2n точках, то он имеет по крайней мере 2n вершин»*. Поскольку для любого овала найдется круг, пересекающий овал не менее чем в четырех точках, то у овала имеется не менее 4 вершин. Таким образом, теорема о четырех вершинах является частным случаем этого утверждения. Интересно, как выглядит аналогичное утверждение для многоугольника? Автор с трудом удержался от искушения попытаться найти его. Предоставим это нашим читателям!