функции $y = a - x + \arcsin\sin(a-x)$ при $0 \le x \le a$. Проследите, как меняется этот график при увеличении a. На рисунке 6 показана фигура, соответствующая случаю $a = 3\pi$.

Вариант 11

1. 0.
2. $\left[-6;3-\sqrt{3}\right)\cup\left(3+\sqrt{3};12\right]$.
3. $(-\infty;+\infty)$. *Указание.* Подкоренное выражение приводится к виду $3\cos4x - \sin4x + 5 - \sqrt{3}$, а так как $|3\cos4x-\sin4x| \le \sqrt{10}$ и $5 - \sqrt{3} - \sqrt{10} > 0$, под корнем при любом x стоит положительное число.
4. $7/3\sqrt{3}$. *Указание.* Периметр треугольника ABC равен сумме отрезков касательных к окружности, проведенных из точки A.
5. $\frac{2}{5}$. *Указание.* Если $a \ne 0$, а функция f — периодическая с периодом T, то $f(T) = f(0) = 1$, т.е. $\cos(a\pi T)\cos\left((t_1^3+t_2^3)\pi T\right) = 1$, но тогда $|\cos a\pi T| = \left|\cos(t_1^3+t_2^3)\pi T\right| = 1$, следовательно, $a\pi T = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $(t_1^3+t_2^3)\pi T = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Отсюда следует, что $\frac{t_1^3+t_2^3}{a} = \frac{k}{n}$. Таким образом, отношение $(t_1^3+t_2^3) : a$ должно быть рациональным при любом $a \ne 0$. Это возможно только, если $t_1^3 + t_2^3 = 0$. С другой стороны, если последнее равенство выполнено, то функция $f(x)$ периодична. Итак, $t_1 = -t_2$, при этом $b = \frac{2}{5}$.

Вариант 12

1. $(-\infty;\log_2 5)$.
2. 16. *Указание.* Фигура — треугольник с вершинами $A(4;-5)$, $B(0;-1)$; $C(0;3)$.
3. $\left[-6;-\frac{11}{6}\pi\right)\cup\left(-\frac{11}{6}\pi;-4\right)\cup\left(2;\frac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6};6\right]$.
4. $\{-2\}\cup[-1;7)$.
5. $\arccos\left(-1/\sqrt{13}\right)$. *Указание.* Пусть $BD = x$, $BE = 2y$. Тогда $AD = 7y$, $EC = 2x$ и по теореме об отрезках секущих $x(7y+x) = 2y(2x+2y)$, откуда $x = y$. Примените теорему косинусов для треугольника BDC.
6. $(7;5;8)\cup(12;+\infty)$. *Указание.* При $\frac{2a-15}{2} > 1$, т.е. при $a > 10$, должно при всех x выполняться неравенство

$$\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5} > 1,$$

что возможно тогда и только тогда, когда

$$\frac{-2+a-5}{2} > 1,$$

т.е. при $a > 12$. При $0 < \frac{2a-15}{2} < 1$ рассуждение аналогично.

ФИЗИКА

Физический факультет

1. Обозначим действующую на ящик со стороны веревки силу через $\vec{F}$ (рис.7). Поскольку ящик должен двигаться равномерно, сумма всех действующих на ящик сил: силы $\vec{F}$, силы тяжести $M\vec{g}$ и силы реакции опоры, которую, как обычно, разложим на две составляющие — силу нормальной реакции $\vec{N}$ и силу трения $\vec{F}_{тр}$, должна быть равна нулю. Отсюда

$$N = Mg\cos\alpha - F\sin\beta,$$

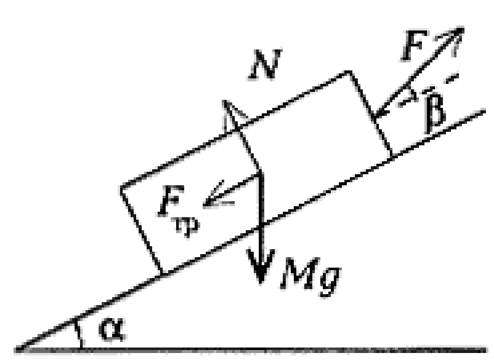

Рис. 7

или, учитывая, что сила сухого трения скольжения равна максимальной силе сухого трения покоя $F_{тр} = \mu N$,

$$Mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = F(\mu\sin\beta + \cos\beta)$$

где β — искомый угол между наклонной плоскостью и веревкой. Если ввести вспомогательный угол γ, определяемый соотношением $\operatorname{ctg}\gamma = \mu$, то из предыдущего уравнения следует

$$F = Mg\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\mu\sin\beta+\cos\beta} = Mg\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}\sin(\beta+\gamma)}.$$

Поскольку минимальной величина F будет при $\sin(\beta+\gamma) = 1$, искомый угол

$$\beta = \operatorname{arctg}\mu.$$

2. Двигатели ракеты совершают работу над выбрасываемыми газами, увеличивая их кинетическую энергию. Считая, что в единицу времени из двигателей выбрасывается масса газа μ и все частицы газа имеют одинаковые скорости v, мощность двигателей ракеты $N = \mu v^2/2$. Поскольку сила тяги двигателей (реактивная сила) равна $F = -\mu v$, а условие зависания ракеты имеет вид $mg - F = 0$, получим $N = mgv/2$. Отсюда искомая скорость

$$v = \frac{2N}{mg}.$$

3. Выберем систему координат XY так, как показано на рисунке 8. Поскольку нить нерастяжима, отрезки нитей, не

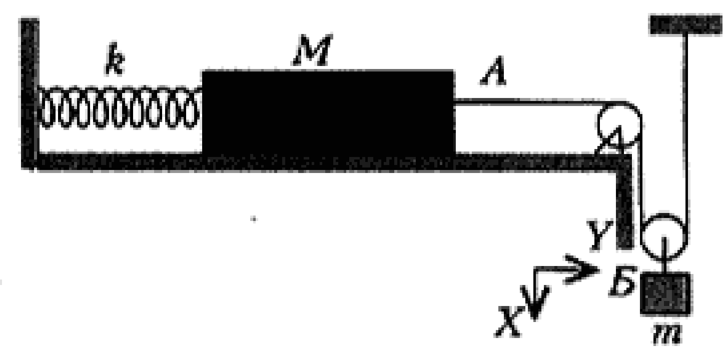

Рис. 8

лежащие на блоках, либо вертикальны, либо горизонтальны, а блоки представляют из себя цилиндры, которые могут вращаться вокруг своих осей, то можно считать, что после начала движения $y = 2x$, где y — координата точки A бруска, а x — координата точки $Б$ кубика. Отсюда следует, что скорости указанных точек связаны соотношением $v_y = 2v_x$. При прохождении положения статического равновесия скорости тел максимальны и, согласно закону сохранения энергии, должны удовлетворять уравнению

$$\frac{ky_p^2}{2} + \frac{Mv_{ym}^2}{2} + \frac{mv_{xm}^2}{2} = mgx_p,$$

где координата y_p точки A равна $mg/(2k)$. Отсюда найдем искомую скорость:

$$v_{ym} = \frac{mg}{\sqrt{k(4M+m)}}.$$

4. Давление p идеального газа, занимаемый им объем V и его абсолютная температура T, согласно уравнению Клапейрона—Менделеева, должны удовлетворять соотношению $pV = BT$, где величина B равна произведению газовой постоянной на число молей газа и при рассматриваемом процессе должна оставаться постоянной. Если давление и объем газа в исходном состоянии обозначить p_0 и V_0 соответственно, то зависимость давления газа от занимаемого им объема можно представить в виде $p = p_0 - a(V - V_0)$, где a — положительная постоянная величина, определяющая скорость изменения давления газа при изменении его объема. Отсюда следует, что температура газа T является квадратичной функцией занимаемого газом объема:

$$BT = (p_0 + aV_0)V - aV^2.$$

При построении графика этой зависимости (рис.9) было учтено, что температура газа в исходном и конечном состояниях одна и та же (произведения давления газа на занимаемый им объем в этих состояниях равны). Из полученной зависимости и приведенного графика видно, что при темпера-