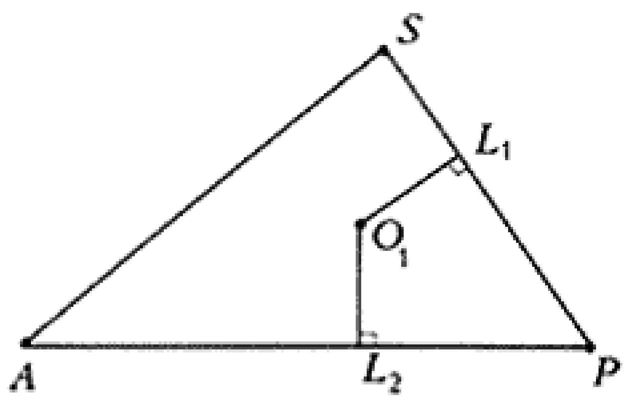

Рис. 3

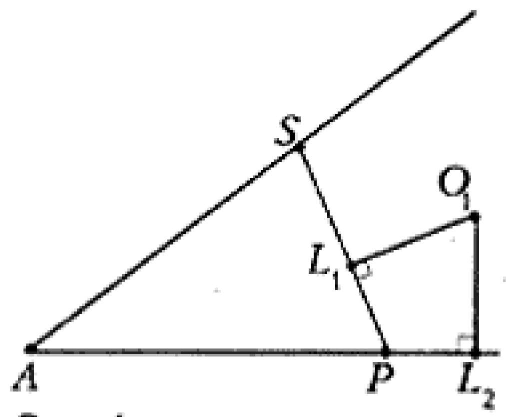

Рис. 4

проекции точек касания сферы с плоскостью SBC и с плоскостью ABC соответственно.

$$AL_2 = AK_2\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8}\left(\sqrt{21}+3\right).$$

В зависимости от расположения центра сферы относительно плоскости SBC получим два случая (рис.3 и 4). На рисунке 3 $AP > AL_2$, а на рисунке 4 — наоборот, $AP < AL_2$. Поэтому из равенства

$$AC = AP\Big/\cos\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}AP$$

следует, что в случае, изображенном на рисунке 3, искомый отрезок AC больше.

Имеем: $O_1L_1 \perp SP$, $O_1L_2 \perp AP$, $O_1L_1 = O_1L_2 = R$, $\angle SPA = \frac{\pi}{2} - \angle TSP = \frac{\pi}{3}$.

Поэтому

$$L_2P = O_1L_2\Big/\operatorname{tg}\frac{\angle SPA}{2} = 3,$$

$$AP = AL_2 + L_2P = \frac{3}{8}\left(\sqrt{2}+3\right)+3 = \frac{3}{8}\sqrt{21}+\frac{33}{8},$$

$$AC = \frac{2}{\sqrt{3}}AP = \frac{3}{4}\sqrt{7}+\frac{11}{4}\sqrt{3}.$$

6. $a = \pm\sqrt{2}$; $a = \pm\left(1+\sqrt{15}\right)/4$. *Указание.* Положив $u = x^2 - x + 2$, приводим уравнение к виду $(u-a^2)^2 = 4a^2x^2$, что равносильно совокупности двух уравнений $u - a^2 = 2ax$, $u - a^2 = -2ax$, или совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2-(2a+1)x+2-a^2=0,\\ x^2+(2a-1)x+2-a^2=0. \end{array}\right.$$

Совокупность двух квадратных уравнений может иметь три корня в трех случаях: когда одно из них имеет два корня, а другое — один, не совпадающий ни с одним из корней первого; или когда каждое из них имеет два корня, причем один из них является общим для обоих уравнений.

Вариант 2

1. 70. *Указание.* $b^3+c^3 = ad(a+d) = 70$.

2. 5 литров.

3. $\log_5\frac{(a-1)\pm\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$ при $a > 11$; 1 при $a = 11$; нет решений при $-\frac{3}{2} \le a < 11$; $\log_5\frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$ при $a < -\frac{3}{2}$. Единственное решение при $a < -\frac{3}{2}$ и $a = 11$. *Указание.* Пусть $t = 5^x$. Задача сводится к отысканию положительных корней уравнения

$$t^2-(a-c)t+2a+3=0.$$

4. $\left[-\left(5+2\sqrt{3}\right)/26;0\right]$. *Указание.* Ясно, что $-\frac{1}{3} \le x \le 0$. Поскольку $\arccos(x+1) \le \pi/2$, а $\frac{7\pi}{6} - \arccos 3x \ge \pi/2$ при $-\frac{1}{6} \le x \le 0$, неравенство заведомо справедливо на промежутке $\left[-\frac{1}{6};0\right]$. При $-\frac{1}{3} \le x < -\frac{1}{6}$ получаем неравенство

$$\sin(\arcsin(x+1)) \le \sin(7\pi/6 - \arccos 3x),$$

или

$$5x+2 \le \sqrt{3-27x^2}.$$

5. $\left(\left(217-5\sqrt{415}\right)/29;\left(180+2\sqrt{415}\right)/29\right)$. *Указание.* Второе уравнение означает, что точка $(x;y)$ лежит на отрезке AB, где $A = (8;6)$, $B = (-2;10)$, длиной $2\sqrt{29} = \sqrt{10^2+4^2}$. Отсюда следует, что $2x + 5y = 46$. Из двух точек пересечения этой прямой с окружностью, задаваемой первым уравнением, отрезку AB принадлежит только одна.

6. $AM = 1$ или $AM = 2$. *Указание.* Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, R_1 и R_2 — их радиусы, $AB = a$, S — точка пересечения прямых AB и O_1O_2 (ясно, что $AS = a/2$, $BS = a/2$, $AB \perp O_1O_2$). Пусть точка T — проекция точки M на прямую O_1O_2, $MT = c$, $AM = x$, y и z — расстояния от точки O_1 до точек S и T соответственно, взятые со знаком «+», если точки S и T лежат на луче O_1O_2, и со знаком «−» в противном случае. Из теоремы Пифагора получаем

$$\begin{cases} y^2+\frac{a^2}{4}=R_1^2,\\ (b-y)^2+\frac{a^2}{4}=R_2^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} z^2+c^2=O_1M^2,\\ (b-z)^2+c^2=O_2M^2, \end{cases}$$

откуда

$$y = \frac{R_1^2-R_2^2+b^2}{2b},\quad z = \frac{O_1M^2-O_2M^2+b^2}{2b}.$$

Кроме того,

$$O_1M^2 = R_1^2 - CM\cdot MD,\ O_2M^2 = R_2^2 - EM\cdot MF$$

и, по условию, $CM = a/3$, $MD = 2a/3$, $EM = a/9$, поэтому $CM\cdot MD = EM\cdot MF = 2a^2/9$. Это значит, что $y = z$, т.е. точка M лежит на отрезке AB. Тогда $2x = \frac{2a^2}{9}$, $x + 2 = a$, откуда либо $x = 2$, либо $x = 4$.

Вариант 3

1. $\frac{\pi}{10}(2n+1)$, $\frac{\pi}{6}(6n\pm1)$, $n\in\mathbf{Z}$.

2. $(-2;0)\cup(2;3)$.

3. 2. *Указание.* Выполните замену $t = 5^{x/2}$.

4. $\frac{25}{8}$. *Указание.* Окружность описана около равнобедренного треугольника LMK.

5. $(-2;-2)$, $(-2;2)$.

6. $m^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}$.

7. $c\sqrt{2+\frac{c}{b}}$. *Указание.* Пусть $\angle A = \alpha$, $AD = l$. Из ΔADC получаем $l = 2c\cos\frac{\alpha}{2}$. Далее запишите отношение отрезков, на которые делится сторона BC биссектрисой AD.

8. 3 решения при $a < -1$, $a = 0$ и $a > 1$; 5 решений при $a = \pm1$; 7 решений при $-1 < a < 1$, $a \ne 0$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x(\sin 2x - a) = 0\\ \cos x \ne 0,\ 0 \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

.Вариант 4

1. $\frac{\pi}{6}(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** $(4;+\infty)$.

3. $(32;\ 2)$. *Указание.* В первом уравнении выполните замену $z = \log_y x$.

4. 9. *Указание.* Докажите, что $EC/BC = DC/AC = 1/3$.

5. 9. *Указание.* Равенство приводится к виду $|u| + u = -(|v| + v)$, где $u = x^2 - 15x + 44$, $v = 1 + \cos(\pi\sqrt{x})$, откуда следует, что $|u| + u = 0$ и $|v| + v = 0$, но в нашей задаче это возможно только при $u = v = 0$.