Ответ на вопрос «Кто старше — Даша или Белла?» таков: Даша старше. Действительно, предположим, что Даша не старше Беллы, тогда из второго ее утверждения следует, что она моложе Гали. В таком случае из ее последнего утверждения следует, что она старше Ани. Теперь из третьего утверждения Даши получаем, что она не моложе Веры, а это противоречит ее первому утверждению.

10. а) Нет. Действительно, если книги стоят первоначально в порядке убывания, т.е. сначала самая большая, затем следующая по величине и т.д., то первая и третья никогда не будут сравнены между собой и поэтому из последовательности сравнений нельзя вывести решение о том, какая книга является самой большой.

б) Нет. Для того, чтобы сравнить все пары книг, следует произвести не менее $8 \cdot 7 / 2 = 28$ сравнений, но при указанной процедуре после 12 сравнений(или раньше) сравниваемые книги начнут периодически повторяться.

в) Нет. Здесь удается в цепочке $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, где A_k означает k-ю по величине книгу, осуществить лишь шесть сравнений из семи необходимых. При начальной расстановке $A_7A_8A_4A_3A_6A_2A_5A_1$ происходят сравнения всех A_k с A_{k+1}, кроме A_4 с A_5.

КАК ОДИН МЛАДШИЙ ШКОЛЬНИК ВСЮ СЕМЬЮ ОЗАДАЧИЛ

1. 120 лотосов. **2.** 28 флоринов. **3.** 28 учеников. **4.** 1 работа, если предположить, что в классе не может быть 84, 126,... учеников. **5.** Решение задачи I, II, IV способами ничем не отличается от решения исходной задачи. Для решения задачи III способом целесообразно привести дроби к *общему числителю*: $3/5 = 6/10$, $2/3 = 6/9$, тогда решение окажется аналогичным. В результате получим: у первого 30 орехов, у второго — 27 орехов.

КАК ДОКАЗАТЬ НЕРАВЕНСТВО

6. Введите новые переменные

$$\begin{cases} \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = x, \\ \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c} = y. \end{cases}$$

8. Функция $f(c) = \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} + \dfrac{1}{1+c}$ монотонно убывает при $c > 0$; докажите, что $\dfrac{a}{1+a^2} \le \dfrac{1}{2}$.

9. Введите новые переменные

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

11. Функция

$$f(x) = (2x-1)a^2 + \left(\frac{2}{x} - 1\right)b^2 + c^2$$

достигает минимума при $x = b/a$.

12. Продифференцируйте функцию

$$f(\alpha) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) - 3/4$$

и исследуйте знак ее производной; $f'(\alpha) = 0$ при $2\alpha + \beta = \pi$.

14. Введите обозначения

$$A = x_2 + \ldots + x_n;\; B = x_2^{-1} + \ldots + x_n^{-1};\; x_1 = x$$

и рассмотрите функцию $f(x) = (A + x)(B + 1/x)$.

15. Докажите, что максимум левой части достигается при части переменных равных нулю и остальных переменных равных $a = \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

ТЕПЛОЕМКОСТЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

1. $p = 3{,}5 \cdot 10^3$ Па. **2.** $C = 2R$. **3.** $A = -R(T_2 - T_1)$.

4. $C = R\left(\dfrac{5}{2} - \dfrac{V}{V_0}\right)$. **5.** $\alpha = 3/2$.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.М.В.ЛОМОНОСОВА

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(-1)^n \arcsin\left(\sqrt{5}/3\right) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

2. $x \ge \log_{2/3}\sqrt{17}$. *Указание.* Выполните замену $t = (2/3)^x$.

3. $56\sqrt{2}$. *Указание.* Треугольник ALO — прямоугольный, поэтому AO — диаметр описанной около него окружности, следовательно, угол AKO — прямой (если точки O и K различны), а точка K — середина AC. Если точки O и K совпадают, то снова $AK = KC$. Итак, KL — средняя линия в треугольнике ABC. Отсюда $AC = 14$, $BC = 16$. Если $\angle BCA$ — острый, то $\angle BCA = \angle LKA = \angle LOA = 45°$, если $\angle BCA$ — тупой, то $\angle LKA = \angle BCA = 135°$ (равенство $\angle C = 90°$ невозможно, так как точки L и O различны по условию).

4. $(\operatorname{arctg} 1/4;\ y)$, где $y \ge \left(2\left(1 - \operatorname{arctg} 1/4 - \pi/4\right)^2\right)^{-1/2}$. *Указание.* Система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \log_2 \sin x - \log_2 \cos x = -2, \\ y > 0, \\ (x - \pi/4)^2 + 1/\left(2y^2\right) \le 1. \end{cases}$$

(Если $\log_2 \cos x > \log_2 2y$, то $2y < 1$ и $1/\left(2y^2\right) > 1$, что противоречит второму уравнению системы.) Из решений уравнения $\operatorname{tg} x = 1/4$ системе удовлетворяет лишь $x = \operatorname{arctg} 1/4$.

5. $\dfrac{3}{4}\sqrt{7} + \dfrac{11}{4}\sqrt{3}$. *Решение.* Сечением сферы плоскостью SAC является окружность с центром O', касающаяся лучей AS и

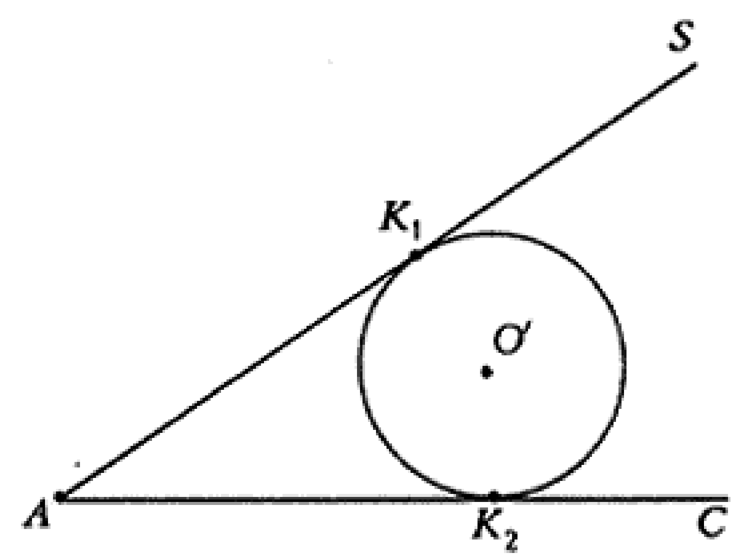

Рис. 2

AC в точках K_1 и K_2 соответственно (рис.2). Обозначим через T основание высоты пирамиды, опущенной из вершины S, а через O и R — центр и радиус сферы. Середину отрезка BC обозначим P. Положим $AC = x$. Из равенства $\angle TSP = \angle O'K_2O$ получаем

$$\sin\angle O'K_2O = \frac{TP}{SP} = \frac{\frac{1}{3}AP}{\frac{1}{2}BC \cdot \operatorname{tg}\angle SBC} = \frac{\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}x}{\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}x} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$O'K_2 = OK_2 \cos\angle O'K_2O = \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Положим $\angle SAC = \alpha$. Так как

$$\cos\alpha = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{3}/\sqrt{7},$$

то из $\Delta AO'K_2$

$$AK_2 = \frac{O'K_2}{\operatorname{tg}\alpha/2} = O'K_2\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{3}{4}\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right).$$

Спроектируем пирамиду и сферу на плоскость ASP. Через O_1 обозначим проекцию центра сферы, а через L_1 и L_2 —