«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

(см. «Квант» № 1)

1. Обозначим количество квартир в подъезде через x. Необходимо отдельно рассматривать случаи: 1) $x<9$; 2) $9 \le x<99$; 3) $99 \le x<999$ и т.д. Будем считать стоимость одной цифры равной одному рублю.

В первом случае стоимость дверных номеров во втором подъезде равна $9 - x$ – стоимости однозначных номеров, плюс $2(x - (9-x)) = 3x - 9$ – стоимости двузначных номеров. А в третьем подъезде в этом случае все номера будут двузначными и их стоимость равна $2x$. По условию $2x = (3x - 9)(6/5)$, откуда $4x = 27$, что невозможно, так как x – целое число.

Во втором случае номера квартир во втором подъезде двузначные и трехзначные, а в третьем – трехзначные. Стоимость номеров во втором подъезде будет равна удвоенному количеству двузначных номеров, т.е. $2(99-x)$, плюс утроенное количество трехзначных номеров, т.е. $3(x - (99 - x))$, и это должно составлять $6/5$ стоимости номеров в третьем подъезде, которая составляет $3x$. Итак, имеем

$$\frac{6}{5}\left(2(99 - x) + 3(x - (99 - x))\right) = 3x.$$

Отсюда получаем, что $x = 66$.

В общем случае, когда во втором подъезде номера n-значные и $(n + 1)$-значные, а в третьем – $(n + 1)$-значные, аналогично получаем, что

$$x = \frac{6\left(10^n - 1\right)}{n+7}.$$

При $n = 2$ мы получаем $x = 66$, а при $n = 3$ число x – не целое, при $n = 4$ имеем $x = 5454$, при $n = 5$ число x вновь не целое, а при n больших пяти не будет выполняться очевидное условие $(6/5)n \le n+1$.

2. Заметим, что число РОЩА не превосходит числа 9876, а число ДУБ не меньше чем 102. Так как $9876 : 102 = 96{,}82\ldots$, то число ДУБов не больше, чем 96. Но $96\times102=9792$, $96\times103 = 9888$, $96\times104 = 9984$, для чисел больших 104 их произведение на 96 уже пятизначно. Значения 102, 103 и 104 не подходят, так как в полученных произведениях имеются одинаковые цифры. Значит, число ДУБов не больше 95. Это значение возможно: $103\times95 = 9785$.

3. Сумма углов равна 45°. Это хорошо видно из рисунка 1, в котором треугольники, опирающиеся на отрезок MN, передвинуты на другие отрезки основания квадрата (например, ΔMAN переходит в ΔPRQ).

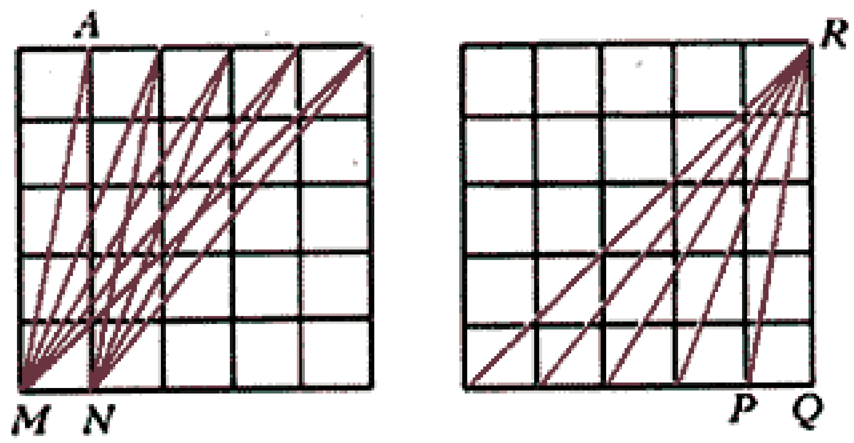

Рис. 1

4. Приказчик не сможет это сделать наверняка, поскольку он должен на чашки весов каждый раз класть поровну монет, и может случиться, что всякий раз весы окажутся в равновесии и поэтому взвешенные монеты будут уже розданы, а в кассе вновь окажется нечетное число монет. Так будет продолжаться до тех пор, пока не останется одна монета. Она и будет фальшивой, но ее не с чем сравнивать.

5. Пусть число лягушек, сваренных дедом Щукарем в понедельник, вторник, среду, четверг и пятницу, соответственно равны x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5. Тогда по условию $(x_1+x_2)=1{,}5(x_4+x_5)$, или $2(x_1+x_2)=3(x_4+x_5)$, откуда следует, что (x_1+x_2) делится на 3. Каждое из чисел x_n может принимать значение 1 или 2, поэтому сумма любых двух из них равняется либо $1+1=2$, либо $1+2=3$, либо $2+2=4$. Как видно, единственное возможное значение, делящееся на 3, – это 3. Поэтому $(x_1+x_2)=3$, и тогда $(x_4+x_5)=2$. Отсюда следует, что $x_4=x_5=1$. Так как по условию $x_1<x_5$, то получается $x_1<1$, но это невозможно, поскольку все x_n должны равняться 1 или 2. Противоречие!

Но оно преодолимо, поскольку в условии не сказано, что Щукарь начал работу именно в понедельник. Говорится лишь, что он работал пять дней подряд, причём в эти дни непременно должны входить упоминаемые в условии понедельник, пятница и вторник. Рассмотрев возможные случаи, получаем еще одну возможность: дед начал работу в пятницу. Тогда первые два дня – это пятница и суббота (и в течение этих двух дней было сварено 3 лягушки), а последние два дня – это понедельник и вторник (в течение которых сварилось две лягушки – по одной каждый день). Теперь противоречия нет: в пятницу сварены две лягушки, а в субботу – одна, т.е. в пятницу действительно больше, чем в понедельник. Сколько же лягушек дед-кулинар приготовил в воскресенье, сказать нельзя, но это и не требуется.

Итак, во вторник в супе оказалась одна лягушка.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» № 5 за 1996 г.)

6. В случае четного n все косточки домино могут быть выложены в одну цепочку. Такую укладку нетрудно осуществить. Если же n нечетно, то каждое из чисел от 0 до n встречается уже нечетное число раз. При составлении цепочки каждое число, кроме двух стоящих на концах цепочки, встречается четное число раз. Значит, останется не меньше чем $n-1$ число (заметим, что чисел от 0 до n ровно $n+1$). Поэтому останется не меньше $(n-1)/2$ косточек. Осталось посчитать общее число косточек и вычесть из него $(n-1)/2$. Общее количество косточек равно $(n+2)(n+1)/2$, поэтому искомое число равно $(n^2 + 2n + 3)/2$. Необходимую расстановку этих косточек нетрудно осуществить.

7. Очевидно, что число 1 нельзя представить в виде суммы нескольких натуральных чисел, а любое другое натуральное нечетное число – можно. Действительно, $2k+1=k+(k+1)$. Перейдем к четным числам. Пусть четное число представимо в виде суммы последовательных чисел от n до m, тогда оно равно $(n+m)(m+1-n)/2$. Каждое из чисел $(n+m)$ и $(m+1-n)$ не меньше двух, и эти числа имеют разную четность, поэтому четное число, чтобы быть представленным в виде суммы последовательных чисел, должно иметь нечетный множитель, больший единицы. Отсюда следует, что степени числа 2 не могут быть представлены в указанном виде.

Покажем, что остальные четные числа представимы в виде суммы последовательных натуральных чисел. Представим четное число в виде $2^k(2p+1)$, где k и p – натуральные числа. Если $2^k > p$, то наше число представляется в виде $2p+1$ натурального числа, начиная с числа $2^k - p$. Если же $2^k \le p$, то наше число представляется в виде 2^{2k} последовательных натуральных чисел, начиная с числа $p - 2^k + 1$. Итак, непредставимы лишь 1 и числа вида 2^n.

8. Возьмем круг, который разделен 18-ю диаметрами на 36 равных секторов, притом такой, что один из диаметров параллелен одной из сторон заданного 19-угольника. Но тогда каждая сторона многоугольника будет параллельна одному из диаметров, а так как сторон 19, а диаметров 18, то найдутся две стороны, параллельные одному диаметру и, следовательно, параллельные между собой.

9. «Кто старше: Вы или Белла?» – спросил у Даши журналист. Но опечатка превратила Беллу в Веру, поэтому из ответов Даши в опубликованном варианте задачи нельзя сделать однозначного вывода. Такой ответ для участников конкурса считается правильным.