Варианты вступительных экзаменов 1996 года

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\frac{5}{\sin^2 x} - \frac{5\sqrt{5}}{\sin x} + 6 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{17 \cdot 9^x - 4^x} \geq 3^x - 3 \cdot 2^x.$$

3. В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, точка L лежит на отрезке AB и $AL = LB$. Описанная около треугольника ALO окружность пересекает AC в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если

$$\angle LOA = 45°,\ LK = 8,\ AK = 7.$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} \log_2 \sin x - \log_2 2y + \\ +|\log_2 \cos x - \log_2 2y| = -2, \\ \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{2y^2} \leq 1. \end{cases}$$

5. В треугольной пирамиде $SABC$ выполнены равенства

$$SA = SB = SC,\ AB = BC = AC,$$
$$\operatorname{tg} \angle SAC = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Сфера с радиусом $\sqrt{3}$ касается луча AS, касается плоскости SBC и касается плоскости ABC в точке, лежащей на луче AC. Найдите наибольшее возможное значение длины отрезка AC.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(x^2 - x + a^2 + 2\right)^2 = 4a^2\left(2x^2 - x + 2\right)$$

имеет ровно 3 различных решения?

Вариант 2

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Числа a, b, c и d являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a + d = 10$, $a \cdot d = 7$. Найдите $b^3 + c^3$.

2. Первый раствор содержит 20% азотной кислоты и 80% воды, второй – 60% азотной кислоты и 40% воды. Первая смесь была получена из 15 литров первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 5 литрами первого, получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если известно, что процентное содержание воды во второй смеси в два раза больше процентного содержания кислоты в первой?

3. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$25^x - (a-1)5^x + 2a + 3 = 0$$

и укажите, при каких a оно имеет единственное решение.

4. Решите неравенство

$$\arccos(3x) + \arcsin(x+1) \leq \frac{7\pi}{6}.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10y + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \\ \quad + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. Хорда CD первой окружности имеет с хордой EF второй окружности общую точку M. Длина отрезка AB в три раза больше длины отрезка CM, которая, в свою очередь, в два раза меньше длины отрезка MD и в шесть раз меньше длины отрезка MF. Какие значения может принимать длина отрезка AM, если известно, что длина отрезка BM равна 2, а длина AB в девять раз больше длины отрезка EM?

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 3x - \sin\left(7x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 5x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x-2}{x\sqrt{6 + x - x^2}} > 0.$$

3. Решите уравнение

$$5^{\frac{x}{2}} - 5^{2-\frac{3x}{2}} = 24 \cdot 5^{-\frac{x}{2}}.$$

4. Касательная к окружности (K – точка касания) параллельна хорде LM. Известно, что $LM = 6$, $KM = 5$. Найдите радиус окружности.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2\left(2x^2 - y^2\right) = 2, \\ 6\log_8(-x) + \log_2 y^2 = 4. \end{cases}$$

6. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, равная m, образует с боковыми гранями углы α и β. Найдите объем параллелепипеда.

7. Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) делит сторону BC на отрезки $BD = b$ и $DC = c$. Найдите AD.

8. Для каждого значения a найдите число решений уравнения

$$a \operatorname{tg} x + \cos 2x = 1,$$

принадлежащих промежутку

$$0 \leq x \leq 2\pi.$$

Вариант 4

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 4x + \sin x \sin 3x = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{x + 5} > 7 - x.$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} 5\left(\log_y x + \log_x y\right) = 26, \\ xy = 64, \\ y < x. \end{cases}$$