Следующие две задачи были предложены на XXII и XXIII Международных математических олимпиадах.

Задача 7. *Из точки M внутри данного треугольника ABC опускаются перпендикуляры MA_1, MB_1, MC_1 на прямые BC, CA, AB. Для каких точек M величина*

$$\frac{BC}{MA_1}+\frac{CA}{MB_1}+\frac{AB}{MC_1}$$

принимает наименьшее значение?

Решение. Преобразуем выражение и применим неравенство (4):

$$\frac{BC^2}{BC\cdot MA_1}+\frac{CA^2}{CA\cdot MB_1}+\frac{AB^2}{AB\cdot MC_1}\geq$$

$$\geq\frac{(BC+CA+AB)^2}{BC\cdot MA_1+CA\cdot MB_1+AB\cdot MC_1}=$$

$$=\frac{4p^2}{2S}=2\frac{p}{r}.$$

Следовательно, наименьшее значение $\frac{BC}{MA_1}+\frac{CA}{MB_1}+\frac{AB}{MC_1}$ будет равно $2\frac{p}{r}$ при

$$\frac{BC}{BC\cdot MA_1}=\frac{CA}{CA\cdot MB_1}=\frac{AB}{AB\cdot MC_1},$$

т.е. при $MA_1=MB_1=MC_1$; следовательно, M — центр вписанной окружности.

Задача 8. *Рассматривается последовательность (x_n) положительных чисел, удовлетворяющих условию $1=x_0\geq x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_n\geq\ldots$ Докажите, что для любой такой последовательности существует n, при котором*

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geq 3{,}999.$$

Решение. Применяя неравенство (4), получим

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geq$$

$$\geq\frac{(x_0+x_1+\ldots+x_{n-1})^2}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n}=K_n.$$

Докажем, что существует натуральное n_0, для которого, при $n>n_0$, $K_n\geq 3{,}999$. Действительно,

$$(x_0+x_1+\ldots+x_{n-1})^2-$$

$$-3{,}999(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)=$$

$$=\left(1-[x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}]\right)^2+$$

$$+0{,}001(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})-3{,}999x_n\geq$$

$$\geq 0{,}001(n-1)x_n-3{,}999x_n\geq 0,$$

когда $n\geq(3{,}999/0{,}001)+1$. Т.е. можно принимать $n_0=4000$.

Задача 9. *Если a_1, a_2, ..., a_n — стороны n-угольника ($n\geq 3$), то*

$$\frac{a_1}{p-2a_1}+\frac{a_2}{p-2a_2}+\ldots+\frac{a_n}{p-2a_n}\geq\frac{n}{n-2},$$

где $p=a_1+a_2+\ldots+a_n$.

Решение. Без ограничения общности можно допустить, что $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n$, тогда $0<p-2a_1\leq p-2a_2\leq\ldots\leq p-2a_n$.

Имея в виду замечание к неравенству (5), получим:

$$\frac{a_1\cdot 1}{p-2a_1}+\frac{a_2\cdot 1}{p-2a_2}+\ldots+\frac{a_n\cdot 1}{p-2a_n}\geq$$

$$\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot n}{np-2(a_1+a_2+\ldots+a_n)}=\frac{n}{n-2}.$$

Задача 10. *Пусть G — центр тяжести треугольника $A_1A_2A_3$, а C — описанная около него окружность. GA_1 пересекает C в точке B_1. Точки B_1 и B_2 определяются аналогично. Докажите неравенство*

$$GA_1+GA_2+GA_3\leq GB_1+GB_2+GB_3.$$

Решение. Через A_1', A_2', A_3' и a_1, a_2, a_3 обозначим середины и длины сторон A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 соответственно.

Пусть $a_1\leq a_2\leq a_3$, тогда легко убедиться, что $GA_3\leq GA_2\leq GA_1$.

Имеем: $\frac{3}{2}GA_1\cdot B_1A_1=\frac{1}{4}a_1^2$, отсюда $GB_1=\frac{1}{2}GA_1+\frac{a_1^2}{6GA}$. Итак, достаточно доказать, что

$$\frac{a_1^2}{3GA_1}+\frac{a_2^2}{3GA_2}+\frac{a_3^2}{3GA_3}\geq$$

$$\geq GA_1+GA_2+GA_3.$$

Применяя неравенство (5), получим

$$\frac{a_1^2}{3GA_1}+\frac{a_2^2}{3GA_2}+\frac{a_3^2}{3GA_3}\geq$$

$$\geq\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{GA_1+GA_2+GA_3}=$$

$$=\frac{3\left(GA_1^2+GA_2^2+GA_3^2\right)}{GA_1+GA_2+GA_3}\geq$$

$$\geq GA_1+GA_2+GA_3.$$

Задача 11. *Докажите неравенство*

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n c_i\right)\cdots$$

$$\cdots\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d_i\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_ib_ic_i\ldots d_i$$

при условии $0\leq a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$, $0\leq b_1\leq b_2\leq\ldots\leq b_n$, $0\leq c_1\leq c_2\leq\ldots\leq c_n$, ..., $0\leq d_1\leq d_2\leq\ldots\leq d_n$.

Решение. Применим неравенство Чебышева:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n c_i\right)\cdots$$

$$\cdots\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d_i\right)\leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n c_i\right)\cdots\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d_i\right)\leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_ib_ic_i\right)\cdots\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d_i\right)\leq\ldots$$

$$\ldots\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_ic_i\ldots d_i.$$