что

$$\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)(b_1+b_2+\ldots+b_k)}{c_1+c_2+\ldots+c_k}+$$
$$+\frac{a_{k+1}b_{k+1}}{c_{k+1}}\ge$$
$$\ge\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_{k+1})(b_1+b_2+\ldots+b_{k+1})}{c_1+c_2+\ldots+c_{k+1}}.$$

Аналогично можно доказать, что если $\frac{a_i}{c_i}$ и $\frac{b_i}{c_i}$ обратно упорядочены, то неравенство (5) меняет знак:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{c_i}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}b_i}{\sum_{i=1}^{n}c_i}. \qquad (5.1)$$

Замечание. При условиях $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\ge 0$, $b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_n\ge 0$ и $0<c_1\le c_2\le\ldots\le c_n$ выполняются условия неравенства (5), и значит, верно это неравенство.

Частными случаями неравенств (4) и (5) являются следующие известные неравенства:

1) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i}\ge\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}c_i}$, при условии $c_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$;

2) $$\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^2\ge\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2; \qquad (6)$$

3) $$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\ge\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i, \qquad (7)$$

при условиях $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n$ и $b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_n$ (*неравенство Чебышева*).

Оказывается, (5) тоже является формой записи классического неравенства. Заменой

$$a_i=c_ix_i,\ b_i=c_iy_i,\ p=\frac{c_i}{\sum_{i=1}^{n}c_i}$$

оно приводится к одному из вариантов неравенства Чебышева: если x_i и y_i одинаково упорядочены, $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ $(p_i>0)$, то для средних $Mz=\sum_{i=1}^{n}z_ip_i$ выполнено

$$Mx\cdot My\le M(xy).$$

Получилось, что неравенство Коши-Буняковского есть частный случай неравенства Чебышева.

С помощью неравенств (4) и (5) можно решить много интересных задач. Рассмотрим, например, такую.

Задача 3. *Для положительных чисел x_1, x_2, x_3 докажите неравенство*

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\ge\frac{3}{2}.$$

Первое решение. В задачах подобного рода иногда бывает удобно вместо $\frac{a}{b}$ написать $\frac{a^2}{ab}$:

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}=$$
$$=\frac{x_1^2}{x_1(x_2+x_3)}+\frac{x_2^2}{x_2(x_3+x_1)}+\frac{x_3^2}{x_3(x_1+x_2)}\ge$$
$$\ge\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)}\ge\frac{3}{2}$$

(здесь мы воспользовались неравенством $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\le x_1^2+x_2^2+x_3^2$).

Второе решение. Эту задачу можно свести к задаче 2, если переписать условие в следующем виде:

$$\left(\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_2+x_3}\right)+\left(\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3+x_1}{x_3+x_1}\right)+$$
$$+\left(\frac{x_3}{x_1+x_2}+\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2}\right)\ge\frac{3}{2}+3,$$

или же

$$\frac{1}{x_1+x_2}+\frac{1}{x_3+x_1}+\frac{1}{x_1+x_2}\ge$$
$$\ge\frac{9}{2(x_1+x_2+x_3)}.$$

Задача 4. *Докажите неравенство*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\ge 2,$$

где a, b, c, $d>0$.

Решение. Эта задача решается так же, как и предыдущая:

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+a)}+\frac{d^2}{d(a+b)}\ge$$
$$\ge\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+2ac+ad+bc+2bd+cd}.$$

Для доказательства последнего неравенства достаточно раскрыть скобки в выражении $(a+b+c+d)^2$ и применить неравенства $a^2+c^2\ge 2ac$, $b^2+d^2\ge 2bd$.

Задача 5. *Для положительных x_1, x_2, …, x_n докажите неравенство*

$$\frac{x_1}{x_2+x_n}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_{n-2}}+\frac{x_n}{x_1+x_{n-1}}\ge 2;$$

где $n\ge 4$.

Решение. Воспользуемся той же идеей:

$$\frac{x_1^2}{x_1(x_2+x_n)}+\frac{x_2^2}{x_2(x_3+x_1)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{x_n^2}{x_n(x_1+x_{n-1})}\ge$$
$$\ge\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{2(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1)}=A_n.$$

Методом математической индукции докажем, что при $n\ge 4$ выражение $A_n\ge 2$. При $n=4$ имеем

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-$$
$$-4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)=$$
$$=(x_1-x_2+x_3-x_4)^2\ge 0.$$

Пусть неравенство верно для k чисел, докажем, что оно верно для $k+1$ чисел.

По предположению, имеем

$$(x_1+x_2+\ldots+(x_{i-2}+x_{i-1})+$$
$$+x_i+\ldots+x_{k+1})^2\ge$$
$$\ge 4(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{i-3}(x_{i-2}+x_{i-1})+$$
$$+(x_{i-2}+x_{i-1})x_i+\ldots+x_kx_{k+1}+x_{k+1}x_1),$$

где $x_i=\max(x_1,\ldots,x_{k+1})$; остается заметить, что $x_{i-1}x_{i-3}+x_{i-2}x_i\ge x_{i-2}x_{i-1}$.

Задача 6. *Докажите неравенство*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+$$
$$+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a+b+c}{3},$$

где a, b, $c>0$.

Решение. Применим неравенство (4):

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+bc^2}+$$
$$+\frac{c^4}{c^3+c^2a+ca^2}\ge$$
$$\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+a^2b+ab^2+b^3+b^2c+bc^2+c^3+c^2a+ca^2}=$$
$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

(здесь мы пользовались неравенством

$$a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}(a+b+c)^2,$$

т.е. неравенством (4) при $n=3$).