кроме того, степень неизвестной $y$ оказалась равной единице. Перепишем полученное неравенство в виде

$$f(y)=(5-4x)y+\left(x^3-x^2-x+1\right)\geq 0.$$

При любом значении $x$ графиком $f(y)$ является прямая. Следовательно, своего наименьшего на отрезке $\left[0, x^2/4\right]$ значения $f(y)$ достигает на одном из концов этого отрезка. Несложные вычисления

$$f(0)=(x-1)^2(x+1)\geq 0,$$

$$4f\left(x^2/4\right)=(x-2)^2\geq 0$$

завершают доказательство неравенства.

Предлагаемая техника может быть применена и для доказательства неравенств с неопределенным числом переменных.

**Пример 7.** *При $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\in[0;1]$ докажите неравенство*

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n+1)^2\geq$$
$$\geq 4\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right).$$

**Доказательство.** Сначала сосредоточимся на переменной $x_n$. Обозначим

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}=a\geq 0,$$

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2=b\geq 0.$$

Исходное неравенство можно теперь переписать в виде

$$f(x_n)=4\left(x_n^2+b^2\right)-(x_n+a+1)^2\leq 0.$$

Графиком $f(x_n)$ является парабола с направленными вверх ветвями. Поэтому для выполнения неравенства при $x_n\in[0;1]$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x_n)$ обладала свойством

$$\begin{cases} f(0)\leq 0; \\ f(1)\leq 0. \end{cases}$$

Иными словами, достаточно установить справедливость двух неравенств, получаемых из исходного при $x_n=0$ и $x_n=1$.

Повторив применительно к каждому из этих двух неравенств те же рассуждения, получим аналогичный результат: достаточно установить справедливость каждого из двух неравенств при $x_{n-1}=0$ и $x_{n-1}=1$. Продолжая аналогично, получим, что достаточно установить справедливость всех $2^n$ неравенств, получаемых из исходного при части (возможно — пустой) переменных равных нулю и остальных — единице. В силу симметрии исходного неравенства достаточно положить

$$x_1=x_2=\ldots=x_k=1,$$

$$x_{k+1}=x_{k+2}=\ldots=x_n=0,$$

$$0\leq k\leq n.$$

При таких значениях переменных исходное неравенство примет вид

$$(k+1)^2\geq 4k\Leftrightarrow(k-1)^2\geq 0.$$

Неравенство доказано.

В заключение приведем пример одного курьезного рассуждения.

**Пример 8.** *Докажите неравенство*

$$a^2-3ab+2b^2+a-2b+3\geq 0.$$

**«Доказательство».** Перепишем неравенство в виде

$$f(a)=a^2-3ab+b^2+a-2b+3\geq 0$$

и вычислим производную

$$f'(a)=2a-3b+1.$$

Так как графиком $f(a)$ является парабола с направленными вверх ветвями, то достаточно доказать неравенство при условии обращения вычисленной производной в ноль:

$$f'(a)=2a-3b+1=0.$$

Аналогично, исходное неравенство можно записать в виде

$$g(b)=a^2-3ab+2b^2+a-2b+3\geq 0.$$

Вычислив производную

$$g'(b)=-3a+4b-2,$$

получим, как и выше, что достаточно доказать неравенство при условии обращения вычисленной производной в ноль:

$$g'(b)=-3a+4b-2=0.$$

Несложно проверить, что существует единственная точка $a=-2$, $b=-1$, в которой выполнены оба условия $f'(a)=0$ и $g'(b)=0$. При таких $a$ и $b$ исходное неравенство действительно выполнено, что и требовалось доказать… Но столь же легко проверить, что, например, при $a=b=4$ исходное неравенство не выполняется.

Найдите ошибку в проведенном рассуждении и постарайтесь ее не повторять!

**Упражнения**

**1.** Докажите, что при $|x|<1$ для натурального $n\geq 2$ выполнено неравенство

$$(1-x)^n+(1+x)^n\leq 2^n.$$

**2.** Докажите, что при $|x|\leq 1$ и $n\in N$ выполнено неравенство

$$(1+x)^{1/n}\leq 1+\frac{x}{n}.$$

**3.** Докажите неравенство

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\leq\frac{a^n+b^n}{2};\ a,b>0;\ n\in\mathbf{N}.$$

**4.** Докажите, что

$$8\left(a^4+b^4\right)\geq(a+b)^4.$$

**5.** Докажите неравенство Гельдера

$$x^{1/p}y^{1/q}\leq\frac{x}{p}+\frac{y}{q},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p>1,\ x,y>0.$$

**6.** Для неотрицательных значений переменных докажите неравенства

а) $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 9abc$;

б) $(a+b)(a+c)(b+c)\geq 8abc$;

в) $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+$
$+ac(a+c-2b)\geq 0$;

г) $3\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq(a+b+c)(ab+ac+bc)$;

д) $3\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$;

е) $(a+b+c)^3-4(a+b+c)(ab+ac+bc)+$
$+9abc\geq 0$;

ж) $(ab+ac+bc)^2\geq 3abc(a+b+c)$;

з) $a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+$
$+c^2(a+b-c)\leq 3abc$.

**7.** Для $x,y,z\in(0;1)$ докажите неравенство

$$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1.$$

**8** (XV Всероссийская олимпиада). При $a,b,c\geq 0$ и $a+b+c\leq 3$ докажите неравенство

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\leq\frac{3}{2}\leq$$
$$\leq\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}.$$

**9** (XLVI Московская олимпиада). При $x>\sqrt{2}$ и $y>\sqrt{2}$ докажите неравенство

$$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4>x^2+y^2.$$

**10.** Пусть $a$, $b$, $c$ — стороны треугольника. Докажите:

а) $2(ab+ac+bc)>a^2+b^2+c^2$;

б) $\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)>2\left(a^3+b^3+c^3\right)$;

в) $3(ab+ac+bc)\leq(a+b+c)^2<$
$<4(ab+ac+bc)$;

г) $a^3+b^3+c^3+3abc\geq 2(a+b)c^2$.

**11.** Пусть $a$, $b$, $c$ и $S$ — соответственно стороны и площадь произвольного треугольника. Докажите, что для любого $x\neq 0$ выполнено неравенство

$$(2x-1)a^2+\left(\frac{2}{x}-1\right)b^2+c^2\geq 4S\sqrt{3}.$$

**12.** Для углов $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ треугольника докажите неравенство

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\geq 3/4.$$

**13.** Для углов $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ нетупоугольного треугольника докажите неравенство

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma<\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma.$$

**14.** Докажите, что при $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\in[a;b]$ выполнено неравенство

$$\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)\left(x_1^{-1}+x_2^{-1}+\ldots+x_n^{-1}\right)\leq$$
$$\leq\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2,\ 0<a<b.$$

**15.** Пусть $a$ — наибольшее из неотрицательных чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$. Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}-\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2\leq\frac{a^2}{4}.$$