Если теперь $x_2 \in [0;1]$, то

$$f(x_2) < f(1),\ f(x_2) < f(0).$$

В противном случае функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[0;1]$. Следовательно, в обоих случаях максимум исходной функции $f(x)$ достигается на одном из концов отрезка $[0;1]$, т.е. совпадает с одним из чисел $f(0)$ или $f(1)$. Вычислим значения на концах отрезка:

$$f(0) = 2(y^3+z^3) - y^2z \le 2(y^3+z^3) - y^2z + (2-y-z^2) = f(1)$$

(так как $y, z \in [0;1]$, то $2-y-z^2 \ge 0$). Итак, осталось доказать, что $f(1) \le 3$. Последнее неравенство можно записать в виде

$$g(y) = 2(y^3+z^3) - y^2z + (2-y-z^2) \le 3.$$

Точно так же, как при исследовании функции $f(x)$, найдя производную

$$g'(y) = 6y^2 - 2zy - 1$$

и отыскав ее корни

$$y_1 = \frac{1}{6}\left(z - \sqrt{z^2+6}\right) < 0,$$

$$y_2 = \frac{1}{6}\left(z + \sqrt{z^2+6}\right),$$

получим, что y_2 — точка минимума. Поэтому $g(y_2) < g(0)$, $g(y_2) < g(1)$ и, как и выше, $g(y)$ достигает наибольшего значения на одном из концов отрезка $[0;1]$:

$$g(0) = 2z^3 + 2 - z^2 \le 2z^3 + 2 - z^2 + (1-z) = g(1).$$

Остается показать, что при $z \in [0;1]$

$$g(1) = 2z^3 - z^2 - z + 3 \le 3.$$

Последнее следует из очевидного при $z \in [0;1]$ неравенства

$$g(1) - 3 = z(z-1)(2z+1) \le 0.$$

Неравенство доказано.

Одним из наиболее интересных классов задач является доказательство геометрических неравенств.

Пример 4. *Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что*

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc \ge a^3 + b^3 + c^3.$$

Доказательство. Так как a, b, c — стороны треугольника, то $c < a + b$. Заметим, кроме того, что неравенство не меняется при любой перестановке переменных. Это дает возможность считать

$$0 < a \le b \le c < a+b. \qquad (*)$$

Перепишем исходное неравенство в виде

$$f(c) = c^3 - c^2(a+b) - c(a^2+b^2-2ab) + a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \le 0.$$

Исследуем поведение функции $f(c)$ на промежутке $b \le c < a+b$. Сначала вычислим значения функции $f(c)$ на концах отрезка:

$$f(a+b) = 0;\ f(b) = a^2(a-2b).$$

Так как $0 < a \le b$ (неравенство $(*)$), то $a - 2b < 0$ и $f(b) < 0$.

Теперь вычислим производную

$$f'(c) = 3c^2 - 2c(a+b) - (a-b)^2$$

и посмотрим, при каких значениях переменной $f'(c) = 0$:

$$c = \left(a + b \pm \sqrt{(a+b)^2 + 3(a-b)^2}\right)\Big/3.$$

На интересующий нас отрезок $[b; a+b]$ попадает (проверьте!) только больший корень

$$c_0 = \left(a + b + 2\sqrt{a^2+b^2-ab}\right)\Big/3.$$

При проходе через точку c_0 знак производной меняется с «−» на «+». Следовательно, функция $f(c)$ сначала убывает на отрезке $[b; c_0]$, а затем возрастает на отрезке $[c_0; a+b]$. (Нарисуйте эскиз графика функции $f(c)$ в соответствии с изученным поведением производной.) Поэтому наибольшее значение этой функции достигается на правом конце $a+b$ отрезка:

$$f(c) \le f(a+b) = 0.$$

Неравенство доказано.

Нередко доказательство геометрических неравенств требует аккуратного рассмотрения тригонометрических соотношений.

Пример 5. *Для углов α, β, γ треугольника докажите неравенство*

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le 3/2.$$

Доказательство. В силу симметрии неравенства будем считать

$$0 < \alpha \le \beta \le \gamma < \pi.$$

С учетом соотношения $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, неравенству можно придать вид

$$f(\alpha) = \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) \le 3/2.$$

Вычислим производную

$$f'(\alpha) = -\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) = 2\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}.$$

Угол $\frac{\beta}{2}$ — острый. Следовательно, знак производной определится множителем $\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)$, имеющим единственный корень $\alpha_0 = (\pi - \beta)/2$ (α, β — острые углы). При проходе через α_0 производная меняет знак с «+» на «−». Тем самым α_0 — точка максимума функции $f(\alpha)$, и достаточно проверить неравенство в точке α_0. При $\alpha = \alpha_0$ получим

$$f(\alpha_0) = \cos\left(\frac{\pi-\beta}{2}\right) + \cos\beta - \cos\left(\frac{\pi+\beta}{2}\right) = 2\sin\frac{\beta}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

Осталось исследовать квадратный трехчлен

$$g(y) = 1 + 2y - 2y^2,$$

где $y = \sin\frac{\beta}{2}$.

Графиком $g(y)$ является парабола, вершина которой имеет координату $y = 0{,}5$. Тем самым наибольшее значение $g(y)$ равно $g(0,5) = 3/2$, что и требовалось доказать. (Заодно выяснилось, что максимум левой части неравенства достигается при $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$.)

Существует большое число технических приемов, позволяющих уменьшить число неизвестных в неравенстве или понизить степени входящих в неравенство переменных.

Пример 6. *Докажите, что при a, b, $c > 0$ выполнено неравенство*

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 - a^2c - ac^2 - b^2c - bc^2 + 3abc \ge 0.$$

Доказательство. Разделив все члены на $c > 0$ и положив $\frac{a}{c} = u$, $\frac{b}{c} = v$, приведем неравенство к виду

$$u^3 + v^3 + 1 - u^2v - uv^2 - u^2 - u - v^2 - v + 3uv \ge 0.$$

Проделаем стандартные преобразования, использующие симметрию левой части неравенства:

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) + 1 - uv(u+v) - (u+v)^2 + 2uv - (u+v) + 3uv \ge 0.$$

Введем новые неизвестные $x = u + v$, $y = uv$. Следует заметить, что

$$x > 0,\ y > 0,\ x^2 \ge 4y$$

(проверьте самостоятельно). В новых переменных неравенство примет вид

$$y(5 - 4x) + (x^3 - x^2 - x + 1) \ge 0,$$

$$0 \le y \le x^2/4.$$

Итак, в результате преобразований уменьшилось число неизвестных и,