Как доказать неравенство

А.ЯРСКИЙ

ПРИМЕНЯЕМЫЕ для доказательства неравенств идеи почти столь же разнообразны, как и сами неравенства. По этой причине доказательство неравенств нередко относят к области искусства. Однако уверенное владение «школьными» методами исследования функций позволяет находить доказательства весьма обширного класса неравенств.

Начнем с неравенства, содержащего только одну переменную.

Пример 1. *Докажите, что при* $|x| \le 1$ *и* $n \in \mathbf{N}$ *выполнено неравенство*

$$1 + \frac{x}{n} - x^2 \le (1+x)^{1/n}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = (1+x)^{1/n} + x^2 - \frac{x}{n} - 1.$$

При таком выборе $f(x)$ неравенство можно записать в виде

$$f(x) \ge 0.$$

Для исследования $f(x)$ вычислим производные

$$f'(x) = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1} + 2x - \frac{1}{n},$$

$$f''(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)(1+x)^{\frac{1}{n}-2} + 2.$$

Несложно исследовать знак второй производной $f''(x)$:

$$f''(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge x_0 = \left(\frac{n-1}{2n^2}\right)^{\frac{n}{2n-1}} - 1.$$

Итак, $f''(x)$ отрицательна при $x < x_0$ и положительна при $x > x_0$. Из этого следует, что $f'(x)$ убывает при $x \le x_0$ и возрастает при $x \ge x_0$.

Займемся исследованием знака первой производной $f'(x)$. Для точки x_0 имеет место неравенство $-1 < x_0 < 0$ (проверьте самостоятельно). И так как $f'(x)$ возрастает при $x > x_0$, то $f'(x) > f'(0) = 0$ при $x > 0$ и $f'(x) < f'(0) = 0$ при $x_0 < x < 0$. При $-1 < x < x_0$ же $f'(x)$ убывает и, следовательно, может иметь еще одну точку смены знака $x_1 \in (-1; x_0)$ (нарисуйте эскиз графика $f'(x)$ в соответствии с полученными результатами). Теперь мы готовы рассмотреть знак исходной функции $f(x)$. При $x \ge 0$ функция $f(x)$ возрастает. Так как $f(0) = 0$, то $f(x) > f(0) = 0$ при $x > 0$. При $x_1 < x \le 0$ функция $f(x)$ убывает. Следовательно, $f(x) > f(0) = 0$ при $x_1 < x < 0$. Если $x_1 \le -1$ (или если такой точки x_1 вообще не существует), то неравенство $f(x) \ge 0$ установлено на всем интересующем нас отрезке $|x| \le 1$. Если же $x_1 > -1$ (в действительности именно этот случай имеет место), то на промежуток $-1 \le x < x_1$ функция $f(x)$ возрастает. Следовательно, $f(x) > f(-1) = 1/n > 0$ при $-1 < x < x_1$. Неравенство доказано.

Неравенство с двумя переменными во многих случаях удается свести к неравенству с одной переменной.

Пример 2 (XII Всероссийская олимпиада). *Докажите неравенство*

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2},$$

$$a, b > 0, \quad a \ne b.$$

Доказательство. В силу симметрии неравенства можно считать $a > b$. Разделив все части на b ($b > 0$), приведем неравенство к виду

$$\sqrt{\frac{a}{b}} < \frac{\frac{a}{b} - 1}{\ln\frac{a}{b}} < \frac{\frac{a}{b} + 1}{2}.$$

Положив $\sqrt{\frac{a}{b}} = x > 1$, получим

$$x < \frac{x^2 - 1}{\ln x} < \frac{x^2 + 1}{2}.$$

Докажем сначала первое неравенство. При $x > 1$ имеем $\ln x > 0$, и можно домножить обе части неравенства на $\ln x$:

$$2x\ln x < x^2 - 1 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2x\ln x - 1 > 0.$$

Исследуем функцию $f(x)$:

$$f'(x) = 2(x - \ln x - 1);$$

$$f''(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \ge 0 \quad (\text{при } x \ge 1).$$

Последнее означает, что $f'(x)$ возрастает при $x \ge 1$. Кроме того, $f'(1) = 0$. Следовательно, при $x > 1$ выполнено неравенство $f'(x) > f'(1) = 0$. Обнаруженная неотрицательность производной означает, в свою очередь, что функция $f(x)$ возрастает на том же промежутке $x \ge 1$. И так как $f(1) = 0$, то $f(x)$ положительна при $x > 1$, что и требуется.

При $x > 1$ второе неравенство можно переписать в виде

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < \ln x \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2 + 1} < \ln x.$$

Рассмотрим функцию $g(x) = \ln x + \frac{2}{x^2 + 1}$. Ее производную можно привести к виду

$$g'(x) = \frac{\left(x^2 - 1\right)^2}{x\left(x^2 + 1\right)^2} \ge 0; \; g(1) = 1 > 0.$$

Рассуждая аналогично первому случаю, завершим доказательство неравенства.

В рассмотренном примере 2 задача легко свелась к исследованию функций одной переменной. В следующем примере нам придется терпеливо уменьшать число неизвестных, сначала до двух, и лишь потом — свести задачу к исследованию функции одной переменной.

Пример 3 (Ленинградская городская олимпиада, 1989 г.). *Докажите неравенство*

$$2\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - \left(x^2y + y^2z + z^2x\right) \le 3,$$

$$x, y, z \in [0; 1].$$

Доказательство. Перепишем неравенство в виде

$$f(x) = 2x^3 - yx^2 - z^2x + 2\left(y^3 + z^3\right) - y^2z \le 3$$

и исследуем функцию $f(x)$. Продифференцируем:

$$f'(x) = 6x^2 - 2yx - z^2.$$

Исследуем знак $f'(x)$. Графиком $f'(x)$ является парабола с направленными вверх ветвями, пересекающая ось абсцисс в точках

$$x_1 = \frac{1}{6}\left(y - \sqrt{y^2 + 6z^2}\right),$$

$$x_2 = \frac{1}{6}\left(y + \sqrt{y^2 + 6z^2}\right).$$

Видно, что $x_1 \le 0$, т.е. x_1 не попадает на интервал $(0; 1)$. При проходе через точку x_2 знак $f'(x)$ меняется с «−» на «+», тем самым x_2 — точка минимума.