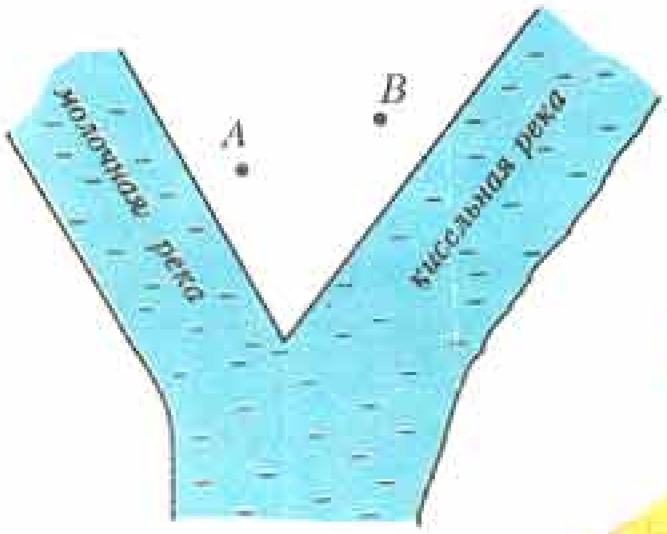
C. Путь ACB — искомый (это следует из соотношений $AD + DB_1 > > AB_1$, $BD = B_1D$, где D — произвольная точка на берегу реки, отличная от точки C).

Подобным же образом, с привлечением идеи симметрии, решается и следующая задача. Она была опубликована в восьмом номере журнала «Квант» в первый год его выпуска (1970 г.).

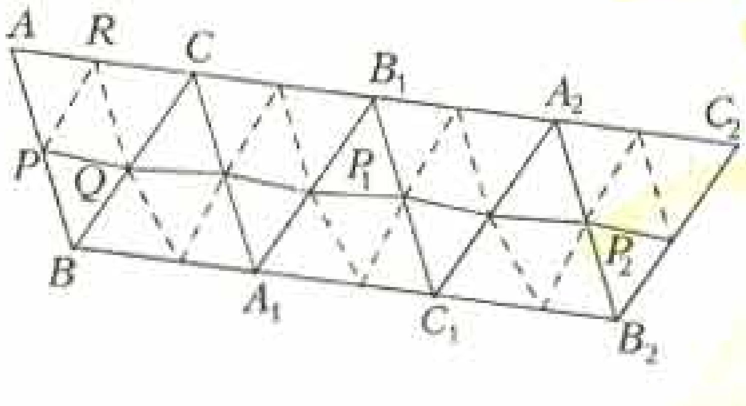
Братец Иванушка и сестрица Аленушка живут на полуострове — соответственно в домике A и домике B.



Иванушка собрался в гости к Аленушке и взял с собой два ведра, чтобы зачерпнуть одним киселя из кисельной реки, другим — молока из молочной. Какой маршрут должен выбрать Иванушка, чтобы кратчайшим путем попасть к Аленушке?

Ортоцентрическим называют треугольник, вершинами которого являются основания высот данного треугольника. Оказывается, из всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет ортоцентрический (теорема Фаньяно (1682 – 1766)). Изумительное по красоте доказательство этой теоремы предложил немецкий математик Герман Шварц (1843 – 1921).

Рассмотрим остроугольный треугольник ABC. Попытаемся осуществить ряд таких последовательных симметрий этого треугольника относительно своих сторон, чтобы в результате получился треугольник, который можно также получить из исходного треугольника ABC параллельным переносом. Для этого достаточно 6 раз отразить треугольник ABC относительно сторон BC, CA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1A_2, A_2B_2. Действительно, композиция этих симметрий является композицией поворотов относительно точек C, B_1 и A_2 на углы $2\angle C$, $2\angle B$ и $2\angle A$ соответственно. Так как в сумме эти углы дают 360°, то композиция данных поворотов есть не что иное, как параллельный перенос. Возьмем на сторонах исходного треугольника AB, BC, CA соответственно точки P, Q, R.



Длина выделенной на рисунке ломаной равна удвоенному периметру ΔPQR, следовательно,

$$PQ + QR + RP \geq \frac{1}{2} \cdot PP_2. \qquad (1)$$

Заметим, что длина отрезка PP_2 не зависит от положения точки P на стороне AB, поскольку A_2B_2 получается из AB параллельным переносом. Точное равенство в соотношении (1) возможно лишь тогда, когда ломаная превращается в отрезок, а это возможно лишь при условии равенства углов $\angle APR = \angle BPQ$; $\angle PQB = \angle RQC$; $\angle ARP = \angle CRQ$. Следовательно, наименьший периметр имеет вписанный треугольник PQR, вершины которого совпадают с основаниями высот треугольника ABC, характеризующихся, как нетрудно заметить, приведенными угловыми равенствами.

Элементарными симметрическими многочленами от двух переменных x, y, называются многочлены $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$. Симметрия здесь проявляется в неизменности (или, как любят выражаться математики, инвариантности) многочленов при перестановке переменных: $\sigma_1 = x + y = y + x$; $\sigma_2 = xy = yx$. Оказывается, произвольный симметрический многочлен от переменных x, y всегда можно выразить в виде некоторого многочлена от σ_1 и σ_2.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x^4 + y^4 = 7. \end{cases} \qquad (2)$$

Стандартный метод исключения переменных здесь явно «пробуксовывает». Но если записать эту систему с помощью элементарных симметрических многочленов σ_1 и σ_2:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 7, \end{cases}$$

то вновь полученная система уже легко решается: σ_1, конечно, равно 1, а два возможных значения переменной σ_2: −1 и 3. Следовательно, искомые неизвестные x и y являются корнями двух квадратных уравнений $z^2 - z - 1 = 0$ и $z^2 - z + 3 = 0$. Второе из этих уравнений вещественных корней не имеет, а среди корней первого уравнения содержатся числа $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Учитывая симметрию задачи, запишем окончательный ответ:

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

К симметрическому виду иногда удается привести и задачу, симметрия в которой искусно маскируется. Пусть, например, нужно решить уравнение $\sqrt[4]{7-z} + \sqrt[4]{z} = 1$. Осуществив замену $\sqrt[4]{z} = y$, $\sqrt[4]{7-z} = x$, придем к системе уравнений (2), решать которую мы уже научились. Дальнейший поиск неизвестного значения z уже не составляет особого труда.

Элементарные симметрические многочлены зачастую помогают и тогда, когда приходится иметь дело с многочленами не только от двух, но и от большего числа переменных. Увеличение числа переменных приводит к большому разнообразию симметрических многочленов.

Соображения симметрии стали источником многих важных идей и открытий в математике и физике. В частности, изучение перестановок переменных x_1, x_2, ..., x_n, которые не меняют вида некоторого рационального выражения $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, помогло Жозефу Луи Лагранжу (1736 – 1813) обнаружить глубокую связь между решением уравнений в радикалах и перестановками корней, а развитие этих идей привело впоследствии к появлению теории Галуа — одного из замечательнейших математиков всех времен.

Симметрические многочлены и устанавливаемые с их помощью свойства алгебраических чисел неожиданным образом пригодились при решении одной из знаменитых проблем древности — квадратуры круга.

Соображения симметрии позволили Жану Виктору Понселе (1788 – 1867) сформулировать замечательный принцип двойственности в проективной геометрии: «из каждого проективного предложения относительно точек и прямых на плоскости может быть получено второе предложение путем замены слова «точка» словом «прямая» и наоборот». Оказалось, что этот принцип позволяет автоматически получать утверждения многих теорем.

Один из крупнейших математиков XX века Герман Вейль (1885 – 1955) соображения симметрии связал с общими понятиями инвариантности (неизменности) и алгебраической теорией групп. Исследование взаимосвязи столь широко трактуемых принципов симметрии с законами сохранения энергии, импульса, момента импульса стало одним из магистральных направлений развития современной физики.

А. Жуков