нальными коэффициентами, у которого $x_0 = -\sqrt{2}$ — точка локального экстремума и при этом $g(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Поскольку

$$g'(-\sqrt{2}) = 4(-\sqrt{2})^3 + 3A(-\sqrt{2})^2 + 2B(-\sqrt{2}) + C = 0,$$

имеем: $8 + 2B = 0$, $6A + C = 0$.

Поскольку $g(-\sqrt{2}) = 4 - 2A\sqrt{2} - 8 + 6A\sqrt{2} + D$, должно быть $D = 4$, $A = -\frac{1}{4}$. Таким образом,

$$g(x) = x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 4x^2 + \frac{3}{2}x + 4$$

— это многочлен (1) при $a = 4$.

А вот еще один способ построения. Рассмотрим многочлен $h(x)$ третьей степени с целыми коэффициентами, у которого точка локального максимума лежит на отрицательной полуоси, точка локального минимума — на положительной и $h(x_{\min}) = -\sqrt{2}$. (Этими свойствами обладает, например, функция $h(x) = 2x^3 - 3x$.) Имеем:

$$\min h(x^2) = -\sqrt{2}.$$

г) Заметим: последний способ дал многочлен $2x^6 - 3x^2$ с *целыми* коэффициентами.

Впрочем, сделав в (1) замену $x = 2y$, получим

$$\min(4Ay^4 - 2y^3 - 4Ay^2 + 3y + A) = -\sqrt{2}, \qquad (2)$$

где A — натуральное число.

Для окончания решения пункта г) достаточно теперь построить многочлен $P(x)$ такой, что $\min\limits_{x \ge 0} P(x) = \sqrt{2}$: многочлен $P(x^2)$ будет искомым.

Рассмотрим многочлен из (2). Так как его значение в точке 0 равно A, при $A > \sqrt{2}$ имеем

$$\min_{y \ge 0}(4Ay^4 - 2y^3 - 4Ay^2 + 3y + A) = \sqrt{2}.$$

Окончательно получим

$$\min(4Ax^8 - 2x^6 - 4Ax^4 + 3x^2 + A) = \sqrt{2}$$

при любом целом $A \ge 2$ (минимальное значение достигается при $x = \sqrt[4]{2}$).

в) Пусть $f(\alpha) = \sqrt{2}$, $f'(\alpha) = 0$, где $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ — многочлен четвертой степени с рациональными коэффициентами. Докажем, что в некоторой точке этот многочлен принимает значение $-\sqrt{2}$. А для этого сначала покажем, что α — число вида $u + v\sqrt{2}$, где u и v — рациональные числа. Разделив $f(x)$ на $f'(x)$ с остатком, получим

$$f(x) = f'(x)q(x) + r(x), \qquad (3)$$

где $r(x)$ — многочлен не более чем второй степени с рациональными коэффициентами. Подставив $x = \alpha$, находим $\sqrt{2} = r(\alpha)$.

Пусть $r(x)$ — многочлен второй степени. Перепишем равенство $\sqrt{2} = r(\alpha)$:

$$\alpha^2 = A\alpha + B + C\sqrt{2}, \qquad (4)$$

где A, B, C — рациональные числа, $C \ne 0$. Перепишем также равенство $f'(\alpha) = 0$:

$$4a\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 2c\alpha + d = 0. \qquad (5)$$

Подставим α^2 из (4) в (5):

$$(A\alpha + B + C\sqrt{2})(4a\alpha + 3b) + \ldots =$$
$$= 4Aa(A\alpha + B + C\sqrt{2}) + 4aC\sqrt{2}\alpha + \ldots = 0.$$

Так как $4aC \ne 0$, то из последнего равенства можно выразить α в виде $u + v\sqrt{2}$ с рациональными u и v. Отсюда следует, что $f(u - v\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.

(Значения многочлена с рациональными коэффициентами в сопряженных точках сопряжены, сказал бы математик. Тот, кто сталкивается с этим соображением впервые, хорошо сделает, если еще раз посмотрит на начало решения пункта а).)

Было бы интересно выяснить, любое ли вещественное алгебраическое число (корень уравнения с целыми коэффициентами) служит наименьшим значением некоторого многочлена с рациональными коэффициентами.

А.Спивак, В.Сендеров

М1570. *Три пары диаметрально противоположных точек сферы — вершины выпуклого многогранника с шестью вершинами. Один из его двугранных углов прямой. Докажите, что у него ровно 6 прямых двугранных углов.*

Противоположные грани нашего многогранника симметричны относительно центра сферы O и потому параллельны. Все эти грани — треугольники (поскольку многогранник — выпуклая оболочка трех пар диаметрально противоположных точек сферы). Пусть AB — ребро прямого двугранного угла, образуемого плоскостями граней ABC и ABC'. Эти две плоскости, а также параллельные им плоскости $A'B'C'$ и $A'B'C$, пересекают сферу по окружностям. Эти четыре окружности пе-

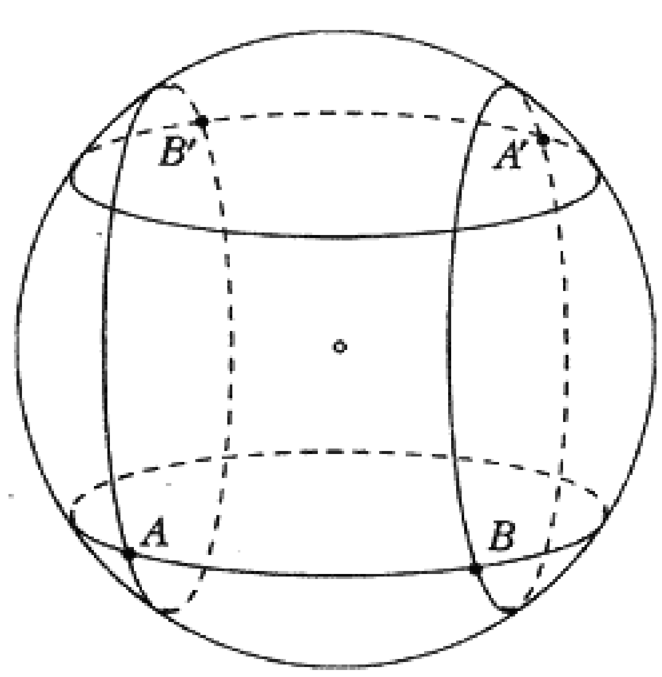

Рис.1

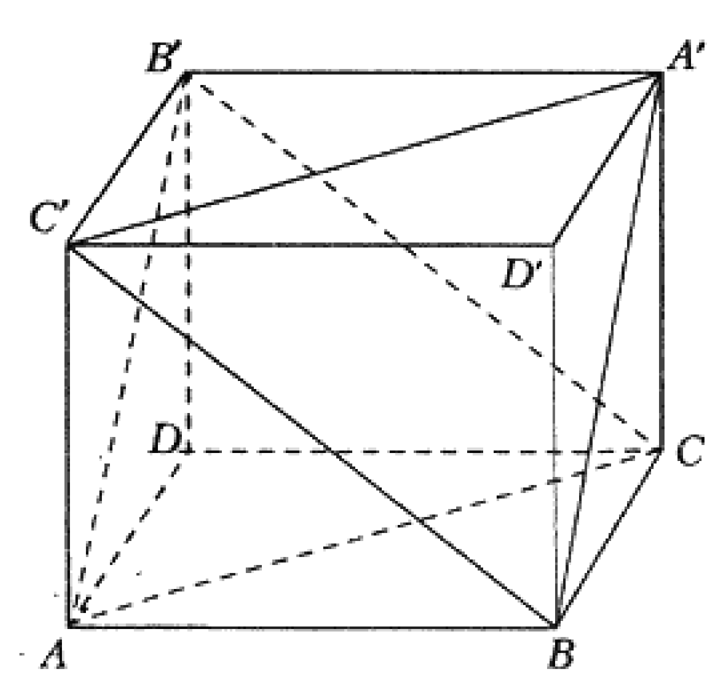

Рис.2