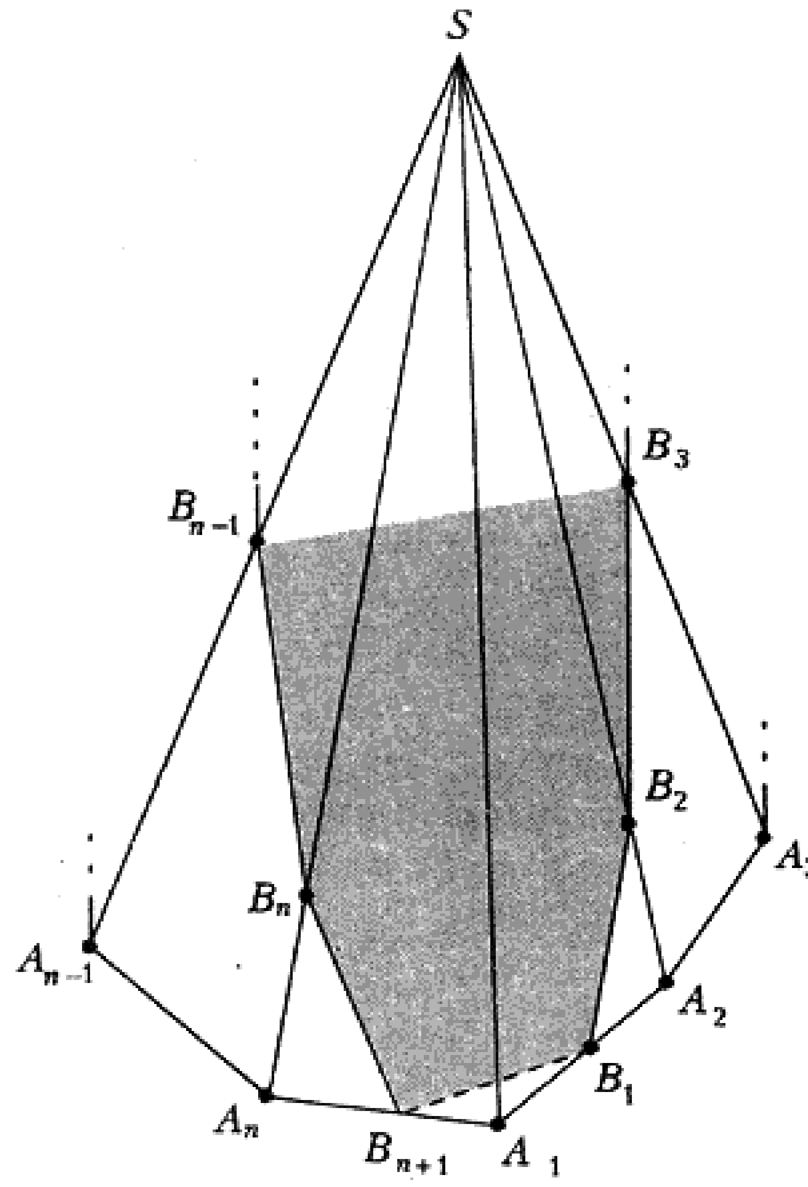

Рис.2

Аналогично доказывается, что прямые A_1A_2, A_3B_6 и A_4A_5 пересекаются в одной точке. Из этого следует, что A_4B_1 и A_3B_6 — оси симметрии правильного пятиугольника $A_1...A_5$, значит, точка O их пересечения — центр этого пятиугольника. Заметим теперь, что если Q — центр правильного шестиугольника $B_1...B_6$, то плоскости SA_3B_6, SA_4B_1 и SB_2B_5 пересекаются по прямой SQ. Следовательно, прямые A_3B_6, A_4B_1 и A_2A_5 должны пересекаться в одной точке — точке пересечения прямой SQ с плоскостью основания пирамиды. Значит, диагональ A_2A_5 правильного пятиугольника $A_1...A_5$ должна проходить через его центр O, что невозможно.

2) $n = 2k - 1$ ($k > 3$). Аналогично первому случаю показывается, что так как в правильном $2k$-угольнике $B_1...B_{2k}$ прямые B_1B_2, $B_{k+1}B_{k+2}$ и B_kB_{k+3} параллельны, то прямые A_1A_2, $A_{k+1}A_{k+2}$ и A_kA_{k+3} должны пересекаться в одной точке, что невозможно, так как в правильном $(2k-1)$-угольнике $A_1...A_{2k-1}$ имеем $A_{k+1}A_{k+2} \parallel A_kA_{k+3}$, а прямые A_1A_2 и $A_{k+1}A_{k+2}$ не параллельны.

3) $n = 2k$ ($k > 2$). Аналогично предыдущему случаю, прямые A_1A_2, $A_{k+1}A_{k+2}$ и A_kA_{k+3} параллельны, следовательно, прямые B_1B_2, $B_{k+1}B_{k+2}$ и B_kB_{k+3} должны пересекаться в одной точке, что невозможно, так как $B_{k+1}B_{k+2} \parallel B_kB_{k+3}$, а прямые B_1B_2 и $B_{k+1}B_{k+2}$ не параллельны.

Замечания. 1. При $n = 3$, 4 утверждение задачи неверно. Примерами могут служить правильный тетраэдр, имеющий сечением квадрат, и правильная четырехугольная пирамида, все боковые грани которой являются правильными треугольниками, которая имеет сечением правильный пятиугольник.

2. Приведенное решение можно было бы изложить короче, если воспользоваться центральным проектированием и его свойством, утверждающим, что при центральном проектировании образами прямых, проходящих через одну точку (или параллельных), являются прямые, проходящие через одну точку (или параллельные). Достаточно спроектировать сечение пирамиды на плоскость основания из вершины пирамиды.

Д.Терешин

М1569. ***Придумайте многочлен с рациональными коэффициентами, минимальное значение которого равно а) $-\sqrt{2}$, б) $\sqrt{2}$. в) Докажите, что многочлена 4-й степени, удовлетворяющего условиям задачи б), не существует. г) Существуют ли многочлены с целыми коэффициентами, удовлетворяющие условиям а), б)?***

а, б) Минимальное значение принимается в точке, где производная равна 0. Поскольку значение многочлена с рациональными коэффициентами в рациональной точке рационально, многочлен $f'(x)$ должен иметь хотя бы один иррациональный корень. Попробуем в этой роли число $\sqrt{2}$. Тогда и $-\sqrt{2}$ будет корнем многочлена $f'(x)$. (Поскольку мы сейчас строим пример, последнее соображение можно было бы и не пояснять. Тем не менее, представим себе, что вместо x в многочлен с рациональными коэффициентами подставили сначала $\sqrt{2}$, а потом $-\sqrt{2}$. Тогда в четных степенях x^{2n} разницы не будет, а нечетные степени x^{2n-1} будут отличаться знаком. Представив значение $f'(\sqrt{2})$ в виде $a + b\sqrt{2}$, где рациональное слагаемое a получается из сложения четных степеней, а слагаемое $b\sqrt{2}$ — из сложения нечетных, видим, что $f'(-\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$.)

Поскольку многочлен нечетной степени принимает все вещественные значения, степень $f(x)$ должна быть четной. Значит, естественно искать $f'(x)$ в виде $(x^2-2)(ax+b)$, где $a > 0$. Тогда

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int\left(ax^3 + bx^2 - 2ax - 2b\right)dx =$$

$$= \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 - ax^2 - 2bx + c.$$

Подставляя $x = -\sqrt{2}$, видим:

$$f\left(-\sqrt{2}\right) = a - \frac{2}{3}b\sqrt{2} - 2a + 2b\sqrt{2} + c.$$

Равенство $f\left(-\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}$ выполнено, если $a = c$ и $\frac{2}{3}b - 2b = 1$, т.е. $b = -\frac{3}{4}$.

Итак, многочлен

$$f(x) = \frac{a}{4}x^4 - \frac{x^3}{4} - ax^2 + \frac{3}{2}x + a \qquad (1)$$

имеет точки экстремума $-\sqrt{2}$, $-\frac{b}{a}$ и $\sqrt{2}$. Если взять положительное число a так, что $-\sqrt{2} < \frac{3}{4a} < \sqrt{2}$, то точки $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ будут точками локального минимума, а точка $\frac{3}{4a}$ — точкой локального максимума. (Это следует из того, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Можно рассуждать и по-другому: заметить, что в точках $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ производная меняет знак с «$-$» на «+», а в точке $\frac{3}{4a}$ — с «+» на «$-$».) В частности, вместо a можно взять любое натуральное число. Осталось вспомнить, что $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$.

Пункт а) можно решить и по-другому. Будем искать многочлен $g(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ с рацио-