М1567. *Центры A, B и C трех непересекающихся окружностей с одинаковыми радиусами расположены в вершинах треугольника. Из точек A, B, C проведены касательные к данным окружностям так, как показано на рисунке 1. Известно, что эти касательные, пересекаясь, образовали выпуклый шестиугольник, стороны которого через одну покрашены в красный и синий цвета. Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих отрезков.*

Введем обозначения так, как показано на рисунке 1. Так как данные окружности имеют одинаковые

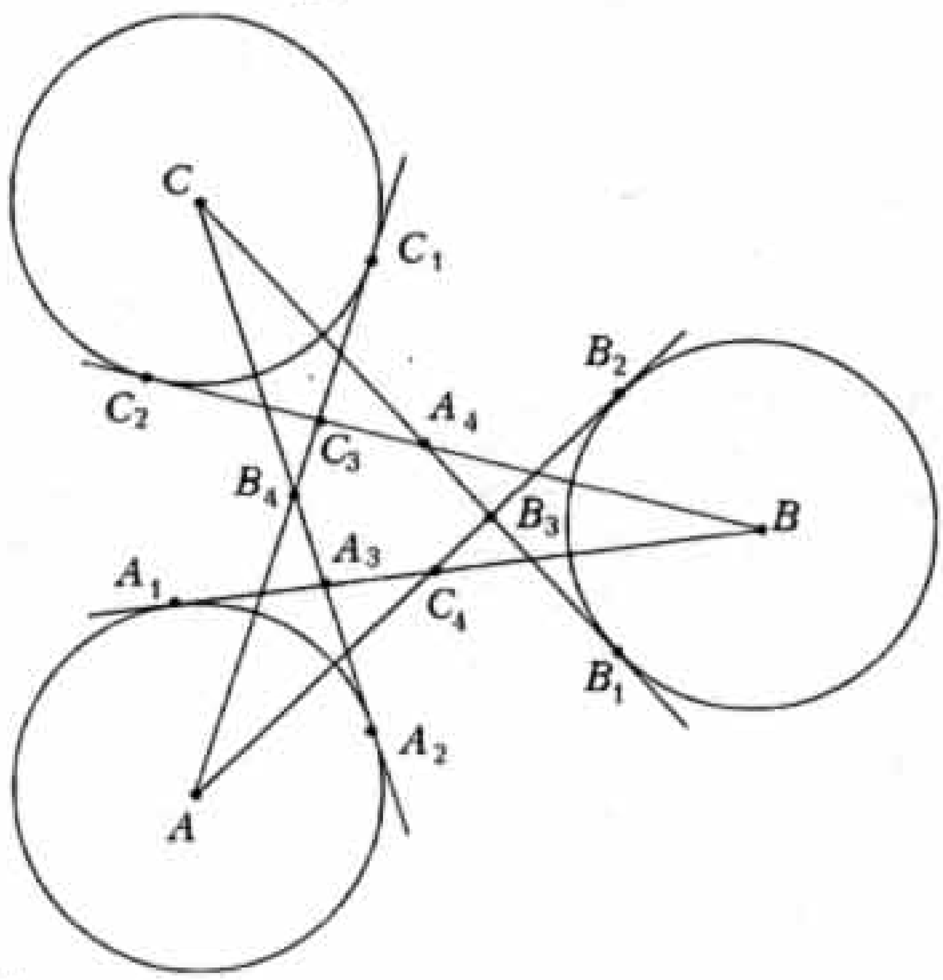

Рис.1

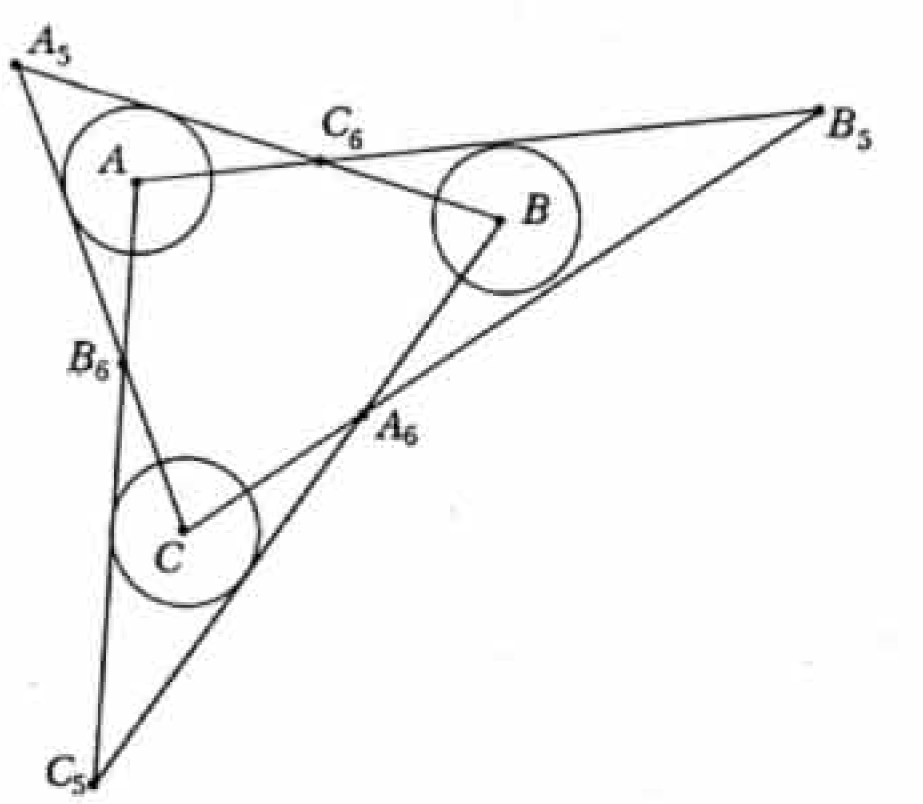

Рис.2

радиусы, то

$$AC_1 = CA_2,\ BA_1 = AB_2,\ CB_1 = BC_2,$$

или

$$AB_4 + B_4C_3 + C_3C_1 = CB_4 + B_4A_3 + A_3A_2,$$
$$BC_4 + C_4A_3 + A_3A_1 = AC_4 + C_4B_3 + B_3B_2,$$
$$CA_4 + A_4B_3 + B_3B_1 = BA_4 + A_4C_3 + C_3C_2.$$

Сложив полученные равенства и заметив, что

$$A_3A_1 = A_3A_2,\ B_3B_1 = B_3B_2,\ C_3C_1 = C_3C_2$$

(как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки) и

$$AC_4 = C_4B,\ BA_4 = A_4C,\ CB_4 = B_4A$$

(так как радиусы данных окружностей равны), получим

$$B_4C_3 + C_4A_3 + A_4B_3 = B_4A_3 + C_4B_3 + A_4C_3,$$

что и требовалось доказать.

Замечания. 1. Аналогичное утверждение справедливо и в случае, изображенном на рисунке 2.
2. Можно доказать, что прямые A_3A_4, B_3B_4 и C_3C_4, равно как и A_5A_6, B_5B_6 и C_5C_6, пересекаются в одной точке.

Д.Терешин

М1568. *Докажите, что при $n \geq 5$ сечение пирамиды, в основании которой лежит правильный n-угольник, не может являться правильным $(n+1)$-угольником.*

Пусть правильный $(n+1)$-угольник $B_1 \ldots B_{n+1}$ является сечением пирамиды $SA_1 \ldots A_n$, где $A_1 \ldots A_n$ – правильный n-угольник. Мы рассмотрим три случая: $n = 5$, $n = 2k-1$ $(k > 3)$ и $n = 2k$ $(k > 2)$.
Так как n-угольная пирамида имеет $(n+1)$ грань, то стороны сечения находятся по одной в каждой грани пирамиды. Поэтому без ограничения общности рассуждений можно считать, что точки B_1, ..., B_{n+1} расположены на ребрах пирамиды так, как показано на рисунках 1 и 2 (в соответствии с указанными случаями).
1) $n = 5$. Так как в правильном шестиугольнике $B_1 \ldots B_6$ прямые B_2B_3, B_5B_6 и B_1B_4 параллельны, а плоскости A_2SA_3 и A_1SA_5 проходят через B_2B_3 и B_5B_6, то их линия пересечения ST $(T = A_1A_5 \cap A_2A_3)$ параллельна этим прямым, т.е. $ST \parallel B_1B_4$. Проведем через прямые ST и B_1B_4 плоскость. Эта плоскость пересечет плоскость основания пирамиды по прямой B_1A_4, которая должна проходить через точку пересечения прямой ST с плоскостью основания, т.е. через точку T. Итак, прямые A_1A_5, A_4B_1 и A_2A_3 пересекаются в одной точке.

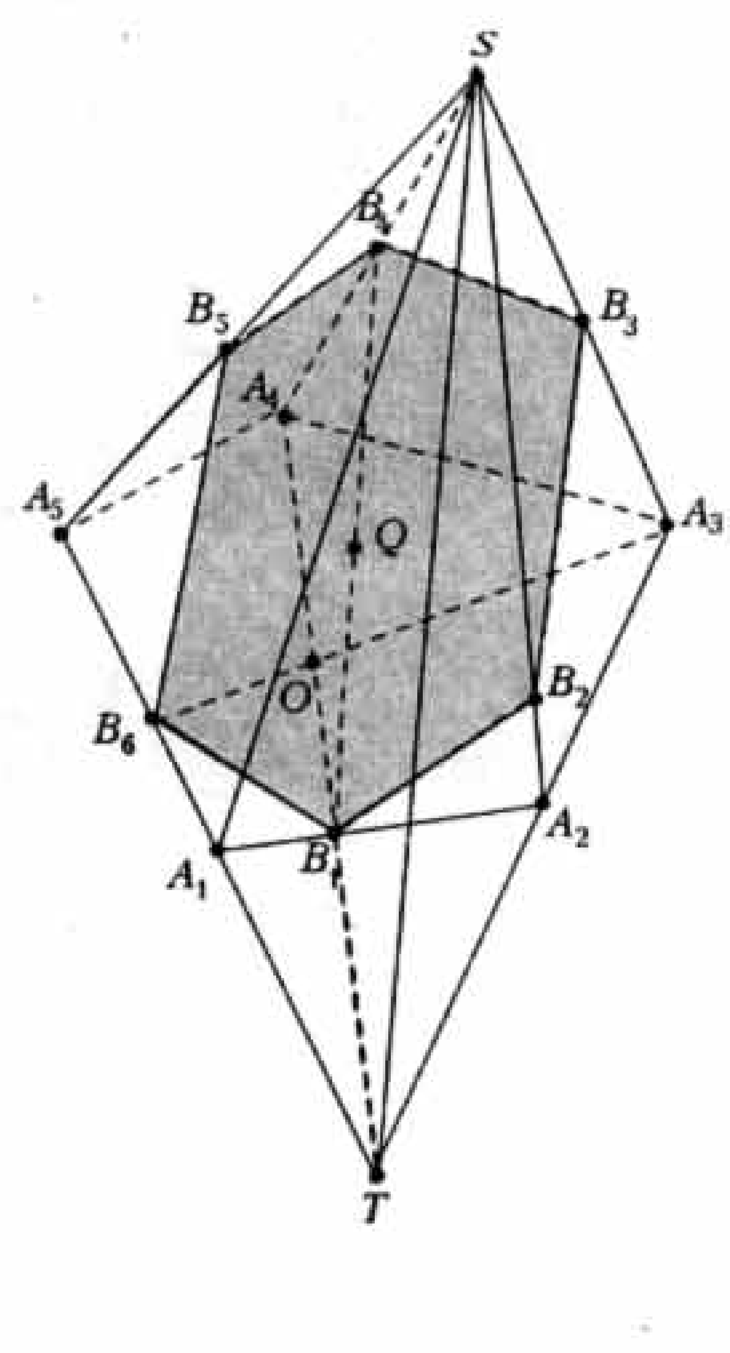

Рис.1