Вот самое короткое из известных нам доказательств. Заметим, что для определения перестановки $X = (x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{100})$ необходимо, чтобы каждая пара (x_i, x_{i+1}) встретилась (в качестве пары соседей) в одном из заданных вопросов — иначе мы не сможем отличить X от перестановки, в которой x_i и x_{i+1} поменяются местами.

Предположим, что первые два вопроса $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{50})$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_{50})$ содержали k общих элементов, $k \geq 0$. Пусть оказалось, что эти k элементов занимают в A и B одинаковые места — ниже мы обозначаем их c_i (т.е. $c_i = a_i = b_i$ для $i \in K \subset \{1, 2, \ldots, 50\}$; множество K состоит из k номеров). Докажем, что тогда еще двух вопросов может оказаться недостаточно для определения X. Тем k элементам, которые не встречались ни в A, ни в B, мы произвольно присвоим номера i из множества K и будем обозначать их d_i. Будем рассматривать ниже лишь перестановки X, в которых k пар $\{c_i, d_i\}$, для $i \in K$ и $50 - k$ пар $\{a_i, b_i\}$ для остальных i (в них $a_i \neq b_i$) — соседи, причем эти 50 пар идут в порядке номеров (а порядок в каждой паре неизвестен, рис.1; разумеется, если $k = 0$, то K

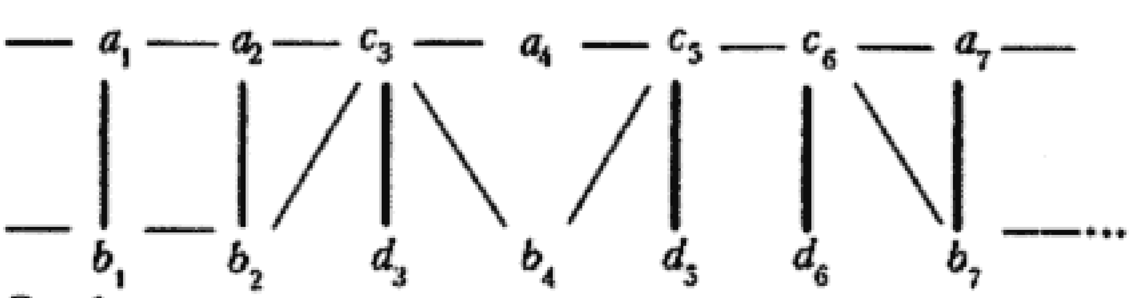

Рис.1

пусто и пар $\{c_i, d_i\}$ нет). Поскольку ни одна из этих 50 пар не встречалась ни в A, ни в B, они должны встретиться в следующих вопросах. Если этих вопросов только два, то 25 пар будут в третьем вопросе, другие 25 — в четвертом, и найдется такое i, что i-я и $(i+1)$-я пара входят в разные вопросы. Но порядок в этих парах может оказаться таким, что «связывающая» их

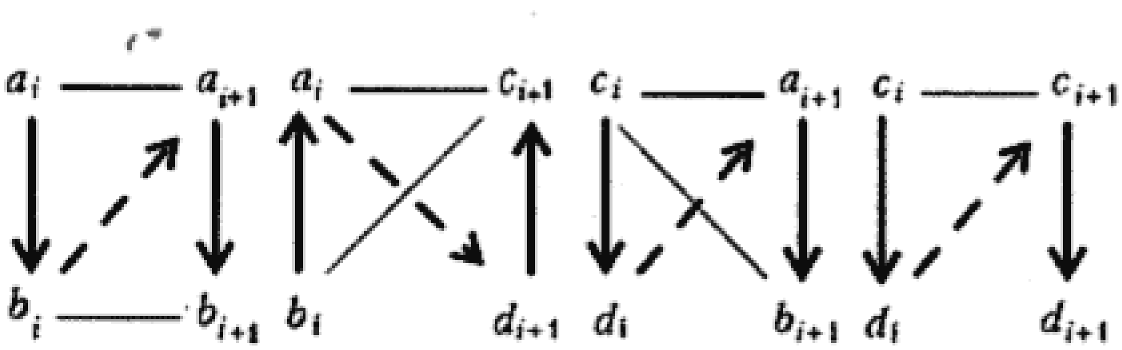

Рис.2

пара — правый элемент i-й и левый — $(i+1)$-й не встречается ни в одном из четырех вопросов (см. рис.2, где новые пары соседей показаны пунктиром). Таким образом, четырех вопросов может оказаться мало.

Замечание. Это доказательство (с небольшими изменениями) годится и для общей задачи, когда требуется найти перестановку $2n$ элементов, задавая вопросы про расположение любых n из них ($n \geq 2$): здесь также требуется не менее 5 вопросов. Но указанный вначале алгоритм годится лишь для случая, когда n четно, т.е. $2n$ кратно четырем. Интересно выяснить, существует ли алгоритм из 5 вопросов для других (нечетных) n, т.е. для $2n = 6, 10, \ldots$

Н.Васильев, С.Токарев

М1566. *В Думе 1600 депутатов, которые образовали 16 000 комитетов по 80 человек в каждом. Докажите, что найдутся два комитета, имеющие не менее четырех общих членов.*

Пусть n депутатов образовали K комиссий по m человек в каждой, никакие две из которых не имеют более 3 общих членов.

Следующая значительно более сильная, чем в условии задачи, оценка проходит в том случае, если $m^2/n > 3$ (у нас $80^2/1600 = 4$). Пусть k_i — число комиссий, в которые входит i-й депутат ($i = 1, 2, \ldots, n$). Выпишем для каждого из них все пары комиссий, в которые он входит. Всего будет выписано $S = \sum_{i=1}^{n} k_i(k_i - 1)/2$ пар.

Поскольку у каждой пары комиссий имеется не более 3 общих членов,

$$S \leq 3K(K-1)/2. \qquad (1)$$

С другой стороны, S можно оценить, используя неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим, которое можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)^2 \Big/ n$$

(оно следует из очевидного $\sum_{i<j}\left(k_i - k_j\right)^2 \leq 0$). Поскольку $\sum_{i=1}^{n} k_i = Km$, получаем

$$S = \left(\Sigma k_i^2 - \Sigma k_i\right)/2 = \frac{1}{2}\left(\frac{K^2m^2}{n} - Km\right). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает оценка

$$K \leq \frac{m-3}{m^2/n - 3}.$$

При $n = 1600$, $m = 80$ это дает $K \leq 77$.

Разумеется, если бы мы потребовали, чтобы любые две комиссии имели не более r общих членов, то (при условии $m^2 > nr$) получили бы для числа комиссий оценку

$$K \leq \frac{m-r}{m^2/n - r}.$$

Однако было бы очень интересно получить оценку для K, годящуюся и для той ситуации, когда условие $m^2 > 3n$(в общем случае, $m^2 > nr$) не выполнено. Вот серия примеров, показывающая, что при этом K может быть существенно, «на порядок», больше. Пусть p — простое число, и $n = pr^2$ депутатов сидят по r человек в p^2 комнатах $(x; y)$, $0 \leq x < p$, $0 \leq y < p$ (клетках квадрата $p \times p$). Пусть $(a; b; c)$ — тройка чисел от 0 до $p - 1$; составим комиссию из pr депутатов, сидящих в комнатах $(x; y)$, расположенных «на прямой» $ax + by + c \equiv 0$ (здесь и ниже знак $\equiv$ означает «сравнение по модулю p»); разумеется, пропорциональные (по модулю p) тройки $(a; b; c)$, $(ka; kb; kc)$ задают одну прямую. Так получится $p^2 + p$ разных комиссий, причем каждые две имеют не более r общих членов. (Например, при $r = 3$, $p = 23$ получаем $n = 1587$ депутатов и 552 комиссии по 69 человек.)

Н. Васильев, А.Скопенков