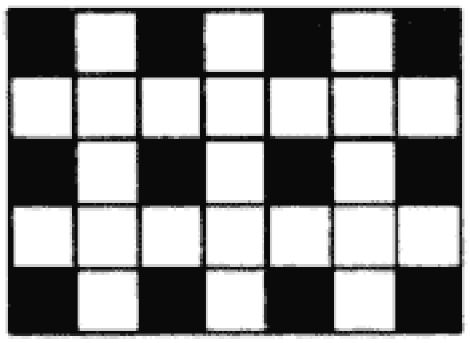
Первое решение. Предположим, что удалось покрыть прямоугольник 5×7 уголками так, что каждая клетка



покрыта k клетками уголков. Покрасим 12 клеток в черный цвет, как показано на рисунке. Любой уголок покрывает не более одной черной клетки. Каждая отмеченная клетка покрыта k уголками, так что уголков не меньше чем $12k$. С другой стороны, количество клеток во всех уголках равно $35k < 3\cdot 12k$. Полученное противоречие показывает, что требуемого покрытия не существует.

Второе решение. Здесь используется та же раскраска. В черные клетки запишем число -2, а в белые — число 1. Заметим, что сумма чисел в клетках, покрываемых любым уголком, неотрицательна; следовательно, если нам удалось покрыть прямоугольник в k слоев, удовлетворяющих условию, то сумма чисел S по всем клеткам, покрытым уголками, неотрицательна. Но если сумма всех чисел в прямоугольнике равна s, то

$$S = ks = k(-2\cdot 12+23\cdot 1) = -k < 0.$$

Получим противоречие.

Замечание. Аналогично доказывается, что покрытия, удовлетворяющего условию задачи, не существует, если прямоугольник имеет размеры $3\times(2q+1)$ и 5×5. Прямоугольник 2×3 можно покрыть в один слой двумя уголками, прямоугольник 5×9 — в один слой пятнадцатью уголками, квадрат 2×2 — в три слоя четырьмя уголками. Комбинируя эти три покрытия, нетрудно доказать, что все остальные прямоугольники $m\times n$ ($m,\ n\ge 2$) можно покрыть уголками, удовлетворяя условию.

М.Евдокимов

М1563. *Докажите, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ отличны от нуля и для любого целого $k = 0, 1, \ldots, n$ $(n < m-1)$*

$$a_1 + a_2\cdot 2^k + a_3\cdot 3^k + \ldots + a_m\cdot m^k = 0,$$

то в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_m$ есть по крайней мере $n+1$ пара соседних чисел, имеющих разные знаки.

Пусть $P(x) = p_0 + p_1x + \ldots + p_nx^n$ — произвольный многочлен степени не выше n (числа p_k могут быть и нулями). Умножив k-е равенство в условии на p_k и сложив эти равенства (по всем $k = 0, 1, \ldots, n$), получим

$$a_1P(1) + a_2P(2) + \ldots + a_mP(m) = 0. \qquad (*)$$

Подберем теперь многочлен $P(x)$ так, чтобы его знак менялся там же, где и знак последовательности a_x ($x = 1, 2, \ldots, m$). Для этого, предположив, что пар (a_j, a_{j+1}), в которых происходит перемена знака, не больше n, возьмем $P(x)$ равным произведению

$$P(x) = a_1\prod(j+1/2-x)$$

по всем таким j, что $a_ja_{j+1} < 0$. Тогда при $x = 1$ знак $P(1)$ совпадает со знаком a_1, а дальше перемены знака $P(x)$ происходят в точках $j+1/2$ между j и $j+1$. Таким образом, слева в равенстве $(*)$ стоит сумма m положительных чисел. Получили противоречие.

О.Мусин

М1564. *Существует ли такое конечное множество M ненулевых вещественных чисел, что для любого натурального n найдется многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества M, все корни которого вещественны и также принадлежат M?*

Ответ: не существует.

Допустим противное: пусть множество $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ удовлетворяет условию задачи. Пусть $a = \min\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$, $A = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$; из условия следует, что $A \ge a > 0$.

Рассмотрим многочлен $P(x) = b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1x + b_0$, все коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_k$ и корни $x_1, x_2, \ldots, x_k$ которого принадлежат множеству M. По теореме Виета $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = -b_{k-1}/b_k$ и

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_k + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k = b_{k-2}/b_k,$$

поэтому

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 = \left(-\frac{b_{k-1}}{b_k}\right)^2 - 2\frac{b_{k-2}}{b_k}.$$

Отсюда следует, что

$$ka^2 \le x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 = \frac{b_{k-1}^2}{b_k^2} \le \frac{A^2}{a^2} + 2\frac{A}{a},$$

т.е.

$$k \le \frac{A^2}{a^4} + 2\frac{A}{a^3} = C.$$

Получили противоречие: степень многочлена не может быть больше C.

Е.Малинникова

М1565. *В строку в неизвестном порядке записаны все целые числа от 1 до 100. За один вопрос про любые 50 чисел можно узнать, в каком порядке относительно друг друга записаны эти 50 чисел. За какое наименьшее число вопросов наверняка можно узнать, в каком порядке записаны все 100 чисел?*

Ответ: за пять вопросов.

Покажем сначала, как наверняка определить порядок чисел в перестановке $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{100})$ за 5 вопросов. Первый вопрос зададим про какие-то 50 чисел — скажем, про $M_1 = \{1, 2, \ldots, 50\}$, второй — про остальные 50 чисел $M_2 = \{51, 52, \ldots, 100\}$. Множество M_3 для третьего вопроса составим из 25 самых левых элементов из M_1 и 25 самых левых элементов из M_2, множество M_4 для четвертого — из остальных, т.е. 25 самых правых из M_1 и M_2. Заметим, что для каждого элемента в M_4 имеется не менее 25 стоящих левее него в X, поэтому 25 самых левых элементов X находятся в M_3; точно так же, 25 самых правых находятся в M_4. Таким образом, мы за 4 вопроса найдем $(x_1, x_2, \ldots, x_{25})$ и $(x_{76}, \ldots, x_{99}, x_{100})$, а порядок остальных 50 элементов определим, задав пятый вопрос.

Очень трудная часть задачи — доказать, что за четыре вопроса определить перестановки X, вообще говоря, нельзя.