Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 1997 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2— 97» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1586» или «Ф1593». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М1590 предлагалась на осеннем туре Турнира городов, частный случай задачи М1587 (при $a = 2$, $b = 3$) — на заочном туре Соросовской олимпиады по математике, а задачи Ф1594 и Ф1597 предлагались на Соросовской олимпиаде по физике.

Задачи М1586 — М1590, Ф1593 —Ф1597

М1586. Из некоторого прямоугольника вырезан равносторонний треугольник так, что одна из его вершин находится в вершине прямоугольника, а две другие лежат на сторонах прямоугольника (не содержащих эту вершину). Докажите, что площадь одного из оставшихся прямоугольных треугольников равна сумме площадей двух других.

А.Егоров

М1587. Решите систему уравнений

$$\frac{x+y}{1+xy}=\frac{1-ay}{a-y},\ \frac{x-y}{1-xy}=\frac{1-bx}{b-x},$$

где a, b — данные положительные числа.

М.Волчкевич

М1588. Два чеканщика играют в следующую игру. Они по очереди чеканят новые монеты достоинством в целое число рублей каждая. При очередном ходе не разрешается чеканить монету в один рубль, а также монету, которая уже имеется или которую можно разменять любым количеством (не обязательно разных) монет уже имеющегося достоинства. Проигрывает тот, кто не может отчеканить новую монету.

а) Докажите, что игра обязательно закончится через конечное число ходов.

б) Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер — и какой должна быть его стратегия?

Д. Шляйхер

М1589. Докажите, что как бы ни раскрасить плоскость в 5 цветов, найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми отличается от 1 не более чем на 0,001.

А.Канель

М1590. На окружности круглого острова расположено по часовой стрелке четыре порта: 1, 2, 3, 4. На этом острове имеется плоская сеть дорог с односторонним движением, не имеющая кольцевых маршрутов: выехав из какого-либо порта или с развилки дорог, нельзя вернуться в этот же пункт снова. Для любых двух портов i и j обозначим через f_{ij} число различных путей из i и j.

а) Докажите неравенство $f_{14}f_{23} \geq f_{13}f_{24}$.

б) Предположим, что на окружности острова шесть портов: 1, 2, 3, 4, 5, 6, перечисленных по часовой стрелке. Докажите неравенство

$$f_{16}f_{25}f_{34}+f_{15}f_{24}f_{36}+f_{14}f_{26}f_{35} \geq f_{16}f_{24}f_{35}+f_{15}f_{26}f_{34}+f_{14}f_{25}f_{36}.$$

(«Плоская сеть» означает, что дороги не проходят одна над другой.)

С.Фомин

Ф1593. На горизонтальном столе стоит тонкостенный цилиндрический стакан. Диаметр стакана $D = 10$ см, высота его $H = 8$ см. В стакан помещают тонкую спицу, как показано на рисунке 1. При какой длине спицы она может оставаться неподвижной? Масса спицы $m = 60$ г, масса стакана $M = 65$ г. Трения нет.

А.Коршиков

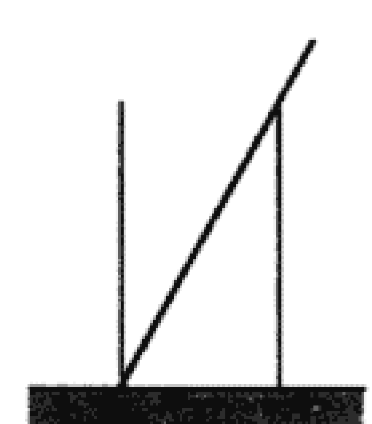

Рис.1