На рисунках 3, 4, 5 и 6 изображены каустики многоугольников, где многоугольник показан красным цветом, а его каустика синим. (Все эти примеры построены с помощью компьютера.) Многоугольники на рисунках 3 и 4 не удовлетворяют условию теоремы, и потому у них только по две экстремальные вершины.

Рисунки 5 и 6 показывают явную связь между числом экстремальных вершин. Так, на рисунке 5 число экстремальных вершин равно 4, а каустика при обходе оборачивается один раз, а на рисунке 6 их 8, а оборотов, соответственно, 3. Конечно, эта связь не случайна. Поясним сначала, что значит «число оборотов» кривой. Это понятие, которое обычно называют *индексом*, можно определить для любой замкнутой кривой. Для замкнутой ломаной это сделать достаточно легко. Пусть $\angle C_1, \angle C_2, \ldots, \angle C_n$ — правые углы при обходе ломаной. (Можно рассматривать и левые, главное, чтобы все углы были одного типа: либо правые, либо левые). Рассмотрим сумму $(180^\circ - \angle C_1) + (180^\circ - \angle C_2) + \ldots + (180^\circ - \angle C_n)$. Эта сумма равна величине $\pm 360^\circ d$, где d — натуральное число (почему?). Число d и называют индексом замкнутой ломаной. Эта характеристика представляет самостоятельный интерес; если вы с ней незнакомы, то рекомендуем вам поэкспериментировать с ней, чтобы убедиться, что она действительно отвечает за число вращений замкнутой кривой.

Вернемся к каустике.

Задача 5. *Докажите, что индекс каустики выпуклого многоугольника положительной кривизны равен d тогда и только тогда, когда у многоугольника ровно $2d + 2$ экстремальных вершин.*

Указание. Из рисунка 2 можно углядеть, что $\angle C_i$ равен $\angle A_i$, если A_i не экстремальная вершина. Дополнительный вклад $2d + 2$ экстремальных вершин составляет $360^\circ (d - 1)$.

Обобщения теоремы о четырех вершинах

В замечательной книге известного российского математика академика А.Д.Александрова «Выпуклые многогранники», (М.: ГИТТЛ, 1950) имеется одна лемма, которая весьма близка к рассматриваемой нами теме. Мы приведем ее в несколько меньшей общности, чем в книге.

Теорема Александрова. *Пусть на плоскости даны два выпуклых многоугольника M_1 и M_2 с параллельными сторонами, которые никакими параллельными переносами не могут быть расположены так, чтобы один содержался внутри другого. Тогда при обходе M_1 или M_2 разность длин соответствующих параллельных сторон должна изменять знак по крайней мере четыре раза.*

На первый взгляд, здесь нет явной связи с теоремой о четырех вершинах для многоугольника и число 4 выглядит как совпадение. Однако посмотрите на задачу 4. Эта задача — прямое следствие теоремы Александрова. Действительно, пусть M_1 — n-угольник ($n > 3$), у которого все углы равны, а M_2 — он же, но повернутый вокруг какой-нибудь вершины M_1 на угол α, равный $180^\circ(n-2)/n$ — внутреннему углу P_1. Тогда стороны M_1 и M_2 будут параллельны, при этом соответствующие параллельные стороны являются соседними. Поскольку при сравнении длин этих сторон знак меняется по крайней мере 4 раза, то и у нашего многоугольника имеется не менее четырех экстремальных сторон.

Заметим, что результат А.Д.Александрова сильнее, чем результат задачи 4. Если повернуть M_1 вокруг вершины на угол $k\alpha$, где $1 < k < n$, то стороны M_2 также будут параллельны P_1, но уже не будут соседними. Номера параллельных сторон отличаются на k, и для них вновь выполнено условие, что разность длин этих сторон при обходе меняется не менее четырех раз. Попробуйте доказать этот результат, не используя теорему Александрова!

Имеется обобщение теоремы о четырех вершинах овала (гладкий случай), принадлежащее, видимо, известному немецкому геометру Вильгельму Бляшке (1885—1962). Мы приведем здесь формулировку этого результата, оставляя без дальнейших пояснений, что означают соответствующие математические понятия.

Пусть C_1 и C_2 — две (положительно направленные) выпуклые замкнутые кривые, $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ — элементы дуги в точках с параллельными (и одинаково направленными) опорными прямыми; тогда отношение $d\sigma_1/d\sigma_2$ имеет минимум четыре экстремума.

Эта теорема переходит в теорему о четырех вершинах овала, если C_2 — окружность.

Нетрудно заметить сходство этого утверждения с теоремой Александрова. С одной стороны, это позволяет считать теорему Александрова вариантом теоремы о четырех вершинах для многоугольника (обобщением задачи 4), а с другой, позволяет надеется, что имеются и другие обобщения для многоугольников, более близкие к нашей основной теореме. Может быть, кому-то из читателей удастся их найти?

В заключение остановимся еще на одном обобщении теоремы о четырех вершинах овала, которое упоминается в книге В.Бляшке «Круг и шар» (М.: Наука, 1967, с.193—194): *«Если овал пересекается с кругом в 2n точках, то он имеет по крайней мере 2n вершин».* Поскольку для любого овала найдется круг, пересекающий овал не менее чем в четырех точках, то у овала имеется не менее 4 вершин. Таким образом, теорема о четырех вершинах является частным случаем этого утверждения. Интересно, как выглядит аналогичное утверждение для многоугольника? Автор с трудом удержался от искушения попытаться найти его. Предоставим это нашим читателям!