случая. Теперь у нас все готово, чтобы сформулировать основную теорему.

Теорема. *У всякого выпуклого n-угольника положительной кривизны по крайней мере четыре вершины являются экстремальными.* (Здесь, естественно, $n > 3$.)

Прежде чем заглянуть в доказательство основной теоремы, вы можете поразмышлять над следующими задачами, являющимися ее вариациями.

Задача 3. *Докажите, что у выпуклого равностороннего многоугольника найдется по крайней мере два угла, величина каждого из которых не превосходит величин двух его соседних углов.*

Эта задача является прямым следствием теоремы (почему?).

Следующая задача предлагалась на заключительном этапе XXI Российской математической олимпиады в1995 году. Она не выводится прямо из теоремы, но наше доказательство теоремы дословно переносится на решение задачи. Интересно, что из двух десятков школьников, решивших эту задачу (она предлагалась сразу в двух классах, в 10 и 11), только один использовал идею доказательства теоремы.

Задача 4 (А.Берзиньш, О.Мусин). *Докажите, что если у выпуклого многоугольника все углы равны, то по крайней мере у двух его сторон длины не превосходят длин соседних с ними сторон.*

Доказательство теоремы

Будем доказывать теорему от противного. Предположим, что у многоугольника M ровно две экстремальные вершины. Без ограничения общности можно считать, что это вершины A_1 и A_k. Пусть у вершины A_1 радиус минимальный, а у вершины A_k — максимальный. Тогда имеют место следующие неравенства:

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_k; \qquad (1)$$

$$R_1 < R_2 < R_{n-1} < \ldots < R_{k+1} < R_k. \quad (2)$$

Проведем к каждой из сторон многоугольника срединные перпендикуляры. Два соседних перпендикуляра, проведенные к сторонам a_{i-1} и a_i, пересекаются в точке C_i — центре описанной окружности треугольника $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ (рис.2). Из определения R_i следует, что $A_iC_i = R_i$.

Пусть B_i — середина стороны a_i, тогда $\angle B_{i-1}C_iB_i = 180° - \angle A_i$. Обозначим этот угол через β_i. Докажем, что если $R_i < R_{i+1}$, то $\angle B_{i-1}C_{i+1}B_{i+1}$ меньше $\beta_i + \beta_{i+1}$. Заметим, что $B_iC_i < B_iC_{i+1}$. (Это неравенство вытекает из того, что у прямоугольных треугольников $B_iC_iA_i$ и $B_iC_{i+1}A_{i+1}$ катеты B_iA_i и B_iA_{i+1} равны.) Поэтому угол $B_iC_iB_{i-1}$ внешний для треугольника $B_{i-1}C_iC_{i+1}$. Отсюда следует, что $\angle B_{i-1}C_{i+1}B_i < \angle B_{i-1}C_iB_i = \beta_i$ и справедливо неравенство $\angle B_{i-1}C_{i+1}B_{i+1} < \beta_i + \beta_{i+1}$.

Применим последнее неравенство к (1), т.е. последовательно рассмотрим углы $B_1C_3B_3$, $B_1C_4B_4$ и т.д.; получим, что $\angle B_1C_kB_k < \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_k$. Аналогично, используя (2), получаем, что $360° - \angle B_1C_kB_k < \beta_1 + \beta_n + \beta_{n-1} \ \ldots + \beta_{k-1}$. Сложив эти неравенства, получаем: $360° < \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 180° - \angle A_1 + 180° - \angle A_2 + \ldots + 180° - \angle A_n = 180°n - (\angle A_1 + \angle A_2 + \ldots + \angle A_n) = 180°n - 180°(n-2) = 360°$. Здесь мы воспользовались тем, что сумма углов n-угольника равна $180°(n-2)$. Следовательно, $360° < 360°$. Противоречие. Теорема доказана.

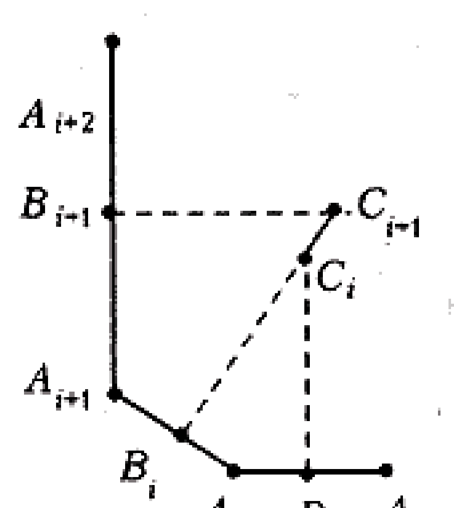

Рис. 2

Каустика многоугольника

Доказательство теоремы позволяет рассмотреть для многоугольников один очень интересный объект, возникающий в математической теории особенностей. Для гладкой кривой *каустикой* называют множество центров кривизны. Чтобы ее построить, нужно отложить вдоль каждой нормали соответствующие радиусы кривизны. Это определение легко переносится на случай многоугольника. Будем называть каустикой n-угольника M с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ замкнутую ломаную $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n, C_1$, где C_i, как и выше, центр описанной окружности треугольника $A_{i-1}A_iA_{i+1}$.

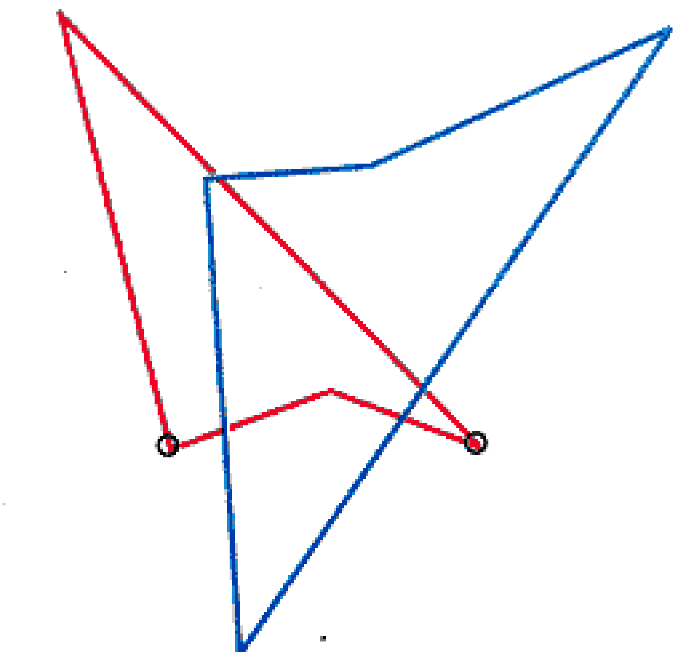
Рис. 3. Невыпуклый многоугольник с двумя экстремальными вершинами


Рис. 4. Выпуклый четырехугольник с двумя экстремальными вершинами

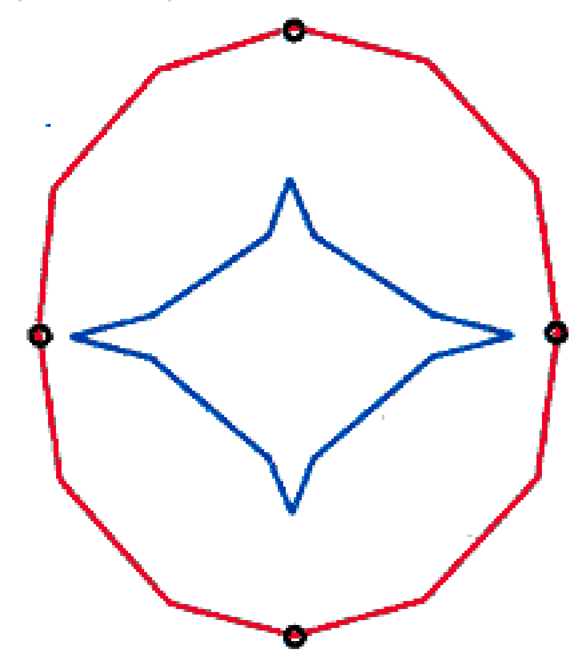
Рис. 5. 12-угольник и его каустика с 4 вершинами

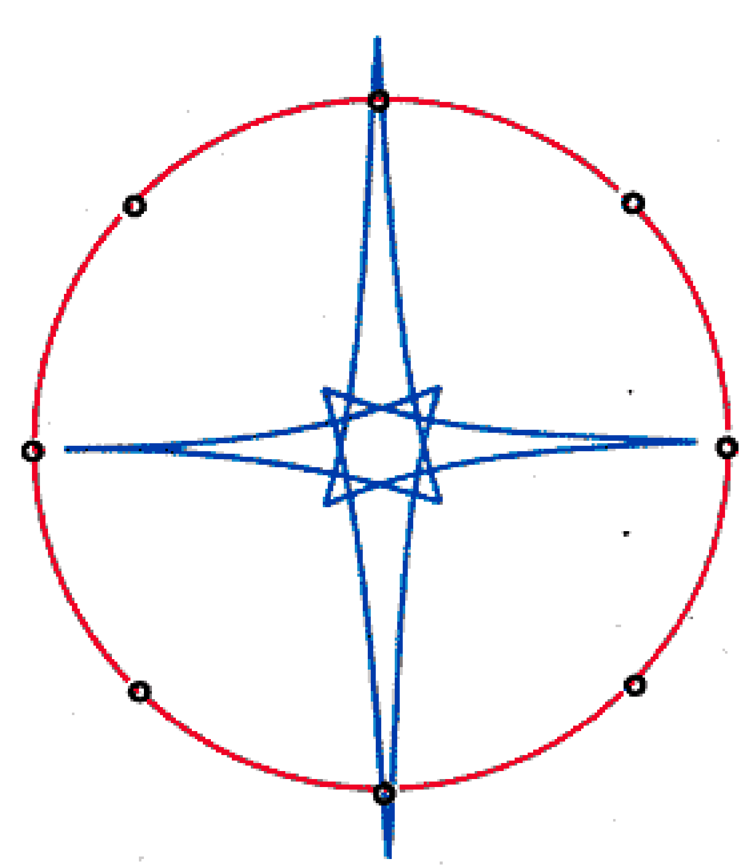
Рис. 6. 100-угольник с 8 экстремальными вершинами